

Soluciones problemas impares semana 10

23 de mayo de 2007

Problema 1 Sea $\mu_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$. Calcular $\lim \frac{\mu_1 + \dots + \mu_n}{n}$.

Solución:

Primero nos damos cuenta que:

$$\mu_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Ahora, para determinar el límite, tenemos que estudiar el comportamiento de $\sum_{i=1}^n \mu_i$.

Por cada i par que hay en la suma, sumamos 1. Si n es par, entonces $\frac{n}{2}$ veces i es par. Si n es impar, entonces $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$ veces i es par, donde $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función parte entera. Lo que quiero decir es, hay $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ números pares entre 1 y n . Luego, en cualquier caso, se cumple:

$$\frac{n-1}{2} \leq \sum_{i=1}^n \mu_i \leq \frac{n}{2}$$

Dividiendo esta desigualdad por n y calculando límites,

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{2} \leq \sum_{i=1}^n \mu_i \leq \frac{n}{2} & \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{n} \\ \frac{n-1}{2n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i \leq \frac{1}{2} & \quad \bigg/ \lim \\ \frac{1}{2} \leq \lim \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i}{n} \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Luego por sandwich concluimos que $\lim \frac{\mu_1 + \dots + \mu_n}{n} = \frac{1}{2}$.

Problema 3 Sea (h_n) con $h_n > 0$ y $(\frac{1}{nh_n}) \rightarrow 0$. Demuestre que $\lim \frac{1}{(1+h_n)^n} = 0$.

Solución:

Como $h_n > 0 > -1$ por la desigualdad de Bernoulli se tiene que $(1+h_n)^n \geq 1+nh_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ donde h_n este definida (que suponemos, son todos, salvo una cantidad finita). Luego,

$$0 \leq \frac{1}{(1+h_n)^n} \leq \frac{1}{1+nh_n} \leq \frac{1}{nh_n}$$

Como $\frac{1}{nh_n} \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, concluimos por sandwich que $\lim \frac{1}{(1+h_n)^n} = 0$.

Problema 5 Sea (u_n) una sucesión creciente. Probar que la sucesión definida por $v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n)$ es creciente.

Solución:

Como (u_n) es creciente, se tiene que:

$$\begin{array}{ccc} u_n & \leq & u_{n+1} \\ u_{n-1} & \leq & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1 & \leq & u_{n+1} \end{array}$$

Sumando estas desigualdades, tenemos que $u_1 + \cdots + u_n \leq nu_{n+1}$. Sumando $n(u_1 + \cdots + u_n)$ a la desigualdad, factorizando por $u_1 + \cdots + u_n$ el lado izquierdo y por n el derecho, se obtiene

$$\begin{aligned} (n+1)(u_1 + \cdots + u_n) &\leq n(u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1}) \\ \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n) &\leq \frac{1}{n+1}(u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1}) \\ v_n &\leq v_{n+1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, (v_n) es creciente.

Problema 7 Sea $u_1 = a$ y $u_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + u_n^2}{a+1}}$ con $0 < a < b$. Muestre que (u_n) es acotada, que es convergente y calcule su límite.

Solución:

Acotada: Por inducción, veamos que $u_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Claramente $u_1 < b$. Supongamos que para algún $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq b$ y veamos que efectivamente $u_{n+1} \leq b$.

$$u_{n+1} \leq b \iff u_{n+1}^2 \leq b^2$$

$$u_{n+1} \leq b \iff u_{n+1}^2 \leq b^2 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\iff \frac{ab^2 + u_n^2}{a+1} \leq b^2 \\ &\iff ab^2 + u_n^2 \leq b^2(a+1) \\ &\iff u_n^2 \leq b^2 \\ &\iff u_n \leq b \end{aligned} \tag{2}$$

Donde (1) y (2) son equivalencias pues $u_n > 0$ y $b > 0$. Además, (2) es verdad por hipótesis de inducción, luego (u_n) es acotada.

Convergente: Para esto, basta ver que es creciente, pues una sucesión creciente y acotada es convergente. El razonamiento es parecido al anterior:

$$\begin{aligned}
 u_n \leq u_{n+1} &\iff u_n^2 \leq u_{n+1}^2 & (3) \\
 &\iff u_n^2 \leq \frac{ab^2 + u_n^2}{a+1} \\
 &\iff au_n^2 + u_n^2 \leq ab^2 + u_n^2 \\
 &\iff au_n^2 \leq ab^2 \\
 &\iff u_n \leq b & (4)
 \end{aligned}$$

Donde (3) y (4) son equivalencias pues $u_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Además, (4) es verdad por que b es cota superior de la sucesión, luego (u_n) es creciente y por lo tanto, convergente.

Límite: Llamemos $l = \lim u_n$ y notemos que $l > 0$ pues $u_n \geq a > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ ya que es creciente y $u_1 = a$. Sabemos que $\lim u_{n+1} = l$, por el problema 6 de la semana 9.

Supongamos que es verdad que $\lim s_n = s \Rightarrow \lim s_n^2 = s^2$. Luego, $\lim u_{n+1}^2 = \lim u_n^2 = l^2$. Ahora,

$$\begin{aligned}
 \lim u_{n+1}^2 &= \lim \frac{ab^2 + u_n^2}{a+1} \\
 l^2 &= \frac{ab^2 + l^2}{a+1} & (5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 al^2 + l^2 &= ab^2 + l^2 \\
 l^2 &= b^2 \\
 l &= b & (6)
 \end{aligned}$$

Donde el lado derecho de (5) se obtiene del álgebra de límites y (6) es porque $l > 0$.

Para concluir veamos que $\lim s_n = s \Rightarrow \lim s_n^2 = s^2$. Para esto basta ver que $(s_n^2 - s^2) \rightarrow 0$. En efecto, ya que $s_n^2 - s^2 = (s_n - s)(s_n + s)$, por álgebra de límites se tiene que:

$$\lim(s_n^2 - s^2) = \lim(s_n - s) \cdot \lim(s_n + s) = 0 \cdot 2s = 0.$$