SEMANA 8

(1) Notemos que el conjunto $\left\{\frac{1}{2n+1} : n\in \mathbb{N}\right\}$ es claramente no vacío, y dado que $\frac{1}{2n+1}$ es mayor estricto de 0, también es acotado inferiormente, luego por el axioma del supremo posee ínfimo y debe ser mayor o igual a 0. Supongamos que 0 no es ínfimo, luego éste ínfimo debe ser mayor estricto que 0, al que notaremos x, entonces $x \leq \frac{1}{2n+1}$ para todo $n \in N$ y así $x(2n+1) \leq 1$ para todo $n \in N$ (*), pero por propiedad arquimedeana para debe existir $n_0 \in N$ tal que $xn_0 > 1$, luego como $2n_0 + 1 > n_0$ y $x > 0$, entonces $x(2n_0 + 1) > xn_0 > 1$ lo que es una contradicción con (*), luego 0 debe ser el ínfimo de $\left\{\frac{1}{2n+1} : n\in \mathbb{N}\right\}$.

(2) Notemos $f([0,1])$ es acotado superiormente por $f(1)$, pues la función es creciente en $[0,1]$, luego $f(1) \geq f(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Como el conjunto $f([0,1])$ es acotado superiormente y no vacío, por el axima del supremo posee supremo. Además como $f(1) \in f([0,1])$ (es decir la cota superior pertenece al conjunto) se tiene también que $f(1)$ es máximo, de ésto se deduce que $f(1)$ es tambien el supremo.

(3) Supongamos que dados a y b reales, para cualquier $\varepsilon > 0$ se cumple $a \leq b + \varepsilon$, luego $\{\varepsilon > 0 : a - b \leq \varepsilon\}$ es no vacío y más aún $\{\varepsilon > 0 : a - b \leq \varepsilon\} = \{\varepsilon > 0\} = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} = \mathbb{R}_+^*$, de lo que se deduce que también es acotado inferiormente, luego por axioma del supremo posee ínfimo. Y el ínfimo de $\mathbb{R}_+^*$ es 0 (verificarlo). Pero $a - b$ es cota inferior de éste conjunto, y dado que el ínfimo es la mayor deber ser mayor que $a - b$, es decir $a - b \leq 0$. Con lo que se concluye que $a \leq b$.

(4) Como T y S son no vacíos, y para todo $x \in S$ y para todo $y \in T$ $x \leq y$, entonces dado cualquier $y_0 \in T$ para todo $x \in S$ $x \leq y_0$, luego S es acotado superiormente, y por axioma del supremo posee supremo; de manera similar, dado cualquier $x_0 \in S$ para todo $y \in T$ $x_0 \leq y$,luego T es acotado inferiormente y por el axioma del supremo posee ínfimo. Por otra parte dado que cualquier $y_0 \in T$ es cota superior de S , entonces $SupS \leq y_0$, pues por definición es la menor de las cotas superiores. De la misma manera, dado que cualquier $y \in T$ es tal que $SupS \leq y$, entonces el $SupS$ es cota inferior de T, luego como el ínfimo de T es la mayor de las cotas inferiores debe tenerse que $SupS \leq InfT$.

(5) (Propuesto)

(6) Como A , B y C son no vacíos y acotados superiormente (hipotesis adicional), entonces poseen supremo. Notemos que para todo $x \in A$ y para todo $y \in B$ existe $z \in C$ tal que $z \geq x + y$, luego para todo $x \in A$ y para todo $y \in B$ existe $z \in C$ tal que $z - y \geq x$, luego claramente $SupC - y \geq z - y \geq x$ para todo $x \in A$ y para todo $y \in B$, entonces $SupC - y$ es cota superior de x y como el supremo de A es la menor de ellas, se tiene que $SupC - y \geq SupA$ para todo $y \in B$, sumando el y a ambos lados de la ecuación y restando $SupA$ (notar que solo puedo hacer esta resta y mantener la desigualdad por el hecho que B es acotado y el $SupA$ existe, luego no estoy sumando infinito) queda $SupC - SupA \geq y$ para todo $y \in B$, luego como el supremo de B es la menor de las cotas superiores de B y tenemos que $SupC - SupA$ es cota superior de B, entonces necesariamente $SupC - SupA \geq SupB$, con lo que se concluye que $SupC \geq SupA + SupB$.

(7) Claramente si $A = (-\infty, a]$ o $A = (-\infty, a)$ con a en $\mathbb{R}$ el $infA^c = supA$. Para la otra implicancia suponemos que $infA^c = supA$, lo que está bien definido pues existen por el axioma del supremo, dado que A es acotado superiormente y A^cacotado inferiormente (el hecho que sean no vacíos viene de que si A fuera vacío, entonces A^c no sería acotado, el mismo argumento se hace con A^c igual vacío) y son ambos no vacíos. Por otro lado,

$$infA^c = supA \Rightarrow infA^c = supA \geq a$$

para todo $a \in A$, entonces $\forall a \in A, \forall b \in A^c$ $b \geq infA^c = supA \geq a$, aparecen 2 casos de interes:

(a) si suponemos el supremo no se alcanza en A :

$$\forall a \in A, \forall b \in A^c \; b \geq infA^c = supA > a$$

y el ínfimo se alcanza en A^c , luego $A = (-\infty, a)$.

(b) si suponemos el supremo se alcanza en A :

$$\forall a \in A, \forall b \in A^c \; b > infA^c = supA \geq a$$

y el ínfimo no se alcanza en A^c, luego $A = (-\infty, a]$.