

Semana 2

P1. a) Demuestre que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x, y > 0 \quad (x + y)(x^{-1} + y^{-1}) \geq 4.$$

indique qué axiomas o propiedades del orden está utilizando.

b) 1) Demuestre que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > 0 \quad x^2 + \frac{2}{x} \geq 3.$$

Hint: Analice el producto $(x - 1)^2(x + 2)$

2) Demuestre que, para $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, se tiene:

$$a^3 + 2b^3 \geq 3ab^2$$

Hint: Utilice la parte anterior.

Solución

a) primero notemos que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \tag{1}$$

en efecto $(x - y)^2 \geq 0$, es decir $x^2 + y^2 \geq 2xy$, luego

$$\begin{aligned} (x + y)(x^{-1} + y^{-1}) &= [(x + y)(x^{-1} + y^{-1})][(xy)(xy)^{-1}] && \text{(neutro } \cdot \text{)} \\ &= (x + y)[(x^{-1} + y^{-1})(xy)](xy)^{-1} && \text{(asociatividad)} \\ &= (x + y)[(x^{-1}(xy) + y^{-1}(xy))](xy)^{-1} && \text{(distributividad)} \\ &= (x + y)[(x^{-1}x)y + (y^{-1}y)x](xy)^{-1} && \text{(asociatividad y conmutatividad)} \\ &= (x + y)[y + x](xy)^{-1} && \text{(inverso y neutro } \cdot \text{)} \\ &= (x^2 + y^2 + 2xy)(xy)^{-1} && \text{(cuadrado de binomio)} \\ &\geq (2xy + 2xy)(xy)^{-1} && \text{(por (1))} \\ &= 4(xy)(xy)^{-1} && \text{(asociatividad)} \\ &= 4 && \text{(inverso } \cdot \text{)} \end{aligned}$$

b) 1) notemos que $(x-1)^2(x+2) \geq 0$, si $x \geq 2$, luego si $x > 0$

$$\begin{aligned}(x-1)^2(x+2) &\geq 0 \\(x^2-2x+1)(x+2) &\geq 0 \\x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2 &\geq 0 \\x^3+2 &\geq 3x\end{aligned}$$

multiplicando por $x^{-1} > 0$ (existe pues $x > 0$), se obtiene

$$x^2 + \frac{2}{x} \geq 3$$

2) De la parte anterior sabemos que si $x > 0$, se tiene que

$$x^2 + \frac{2}{x} \geq 3$$

Sean $a, b > 0$, poniendo $x = \frac{a}{b} > 0$ en la desigualdad anterior se obtiene

$$\frac{a^2}{b^2} + 2\frac{b}{a} \geq 3$$

multiplicando esto por $ab^2 > 0$,

$$a^3 + 2b^3 \geq 3ab^2.$$

P2. a) Sea A el conjunto solución de la inecuación $|x| \leq |x-1|$ y sea B el conjunto solución de la inecuación $|4x-2| > x(1-2x)$.

1) Resuelva las inecuaciones, esto es, determine A y B .

2) Calcule $A \cup B$, $A \cap B$.

b) Resuelva la inecuación:

$$\frac{|x-2| + |2x+11|}{(x-2)|x+|x-2||} < \frac{1}{2}.$$

c) Encuentre el conjunto solución de la inecuación

$$|x^2+3x| + x|x+3| + x^2 \geq 7 + |1+x^2|.$$

d) Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{|x^2-2x+1|}{|x^2-3x+2|} \leq 1.$$

e) Encuentre el conjunto solución de la inecuación

$$|x^2-2x| + x|x+3| \geq 3$$

Solución

- a) 1) A: Separamos el análisis de acuerdo a los puntos críticos, en este caso $x = 0$ y $x = 1$.
 (i) si $x \in (-\infty, 0]$

$$\begin{aligned} |x| &\leq |x - 1| \\ \Leftrightarrow -x &\leq -(x - 1) \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 1 \\ \Rightarrow S_1 &= \mathbb{R} \cap (-\infty, 0] = (-\infty, 0] \end{aligned}$$

- (ii) si $x \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} |x| &\leq |x - 1| \\ \Leftrightarrow x &\leq -(x - 1) \\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{1}{2} \\ \Rightarrow S_2 &= (-\infty, \frac{1}{2}] \cap (0, 1) = (0, \frac{1}{2}] \end{aligned}$$

- (iii) si $x \in [1, \infty)$

$$\begin{aligned} |x| &\leq |x - 1| \\ \Leftrightarrow x &\leq (x - 1) \\ \Leftrightarrow 0 &\leq -1 \\ \Rightarrow S_3 &= \phi \cap [1, \infty) = \phi \end{aligned}$$

Luego la solución final esta dada por $A = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (-\infty, \frac{1}{2}]$

B: De nuevo separamos el análisis de acuerdo a los puntos críticos, en este caso $x = \frac{1}{2}$.

- (i) si $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} |4x - 2| &> x(1 - 2x) \\ \Leftrightarrow 2(1 - 2x) &> x(1 - 2x) \\ \Leftrightarrow 2 &> x \\ \Rightarrow S_1 &= (-\infty, 2) \cap (-\infty, \frac{1}{2}) = (-\infty, \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

notar que hemos ocupado el hecho de que si $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$, entonces $1 - 2x > 0$.

- (ii) si $x = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} |4x - 2| &> x(1 - 2x) \\ \Leftrightarrow 0 &> 0 \\ \Rightarrow S_2 &= \phi \cap \{\frac{1}{2}\} = \phi \end{aligned}$$

(iii) si $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$

$$\begin{aligned} |4x - 2| &> x(1 - 2x) \\ \Leftrightarrow 2(2x - 1) &> -x(2x - 1) \\ \Leftrightarrow 2 &> -x \\ \Rightarrow S_3 &= (-2, \infty) \cap (\frac{1}{2}, \infty) = (\frac{1}{2}, \infty) \end{aligned}$$

notar que hemos ocupado el hecho de que si $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$, entonces $2x - 1 > 0$.

Luego la solución final esta dada por $B = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$.

2) (i) $A \cup B = (-\infty, \frac{1}{2}] \cup (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty) = \mathbb{R}$.

(ii) $A \cap B = (-\infty, \frac{1}{2}] \cap [(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)] = (-\infty, \frac{1}{2})$.

b) debemos resolver

$$\frac{|x - 2| + |2x + 11|}{(x - 2)|x + |x - 2|} < \frac{1}{2} \quad (2)$$

que también se puede escribir como

$$\frac{2|x - 2| + 2|2x + 11| - (x - 2)|x + |x - 2|}{2(x - 2)|x + |x - 2|} < 0.$$

pero $|x + |x - 2||$ es siempre positivo, en efecto:

(i) si $x \geq 2$, $x + |x - 2| = 2x - 2 \geq 0$.

(ii) si $x < 2$, $x + |x - 2| = x - x + 2 = 2 > 0$.

luego encontrar el conjunto solución de (2) es equivalente a encontrar el conjunto solución de

$$\frac{2|x - 2| + 2|2x + 11| - (x - 2)(x + |x - 2|)}{(x - 2)} < 0. \quad (3)$$

Ahora los puntos críticos de (3) son $x = 2$ y $x = -\frac{11}{2}$, luego

(i) si $x \in (-\infty, -\frac{11}{2})$,

$$\begin{aligned} \frac{-2(x - 2) - 2(2x + 11) - (x - 2)(x - (x - 2))}{(x - 2)} &< 0 \\ \Leftrightarrow -2x + 4 - 4x - 22 - x^2 + 2x + x^2 - 4x + 4 &> 0 \\ \Leftrightarrow -8x - 14 &> 0 \\ \Leftrightarrow x &< -\frac{7}{4} \\ \Rightarrow S_1 &= (-\infty, -\frac{7}{4}) \cap (-\infty, -\frac{11}{2}) = (-\infty, -\frac{11}{2}). \end{aligned}$$

(ii) si $x \in (-\frac{11}{2}, 2)$,

$$\begin{aligned} \frac{-2(x - 2) + 2(2x + 11) - (x - 2)(x - (x - 2))}{(x - 2)} &< 0 \\ \Leftrightarrow -2x + 4 + 4x + 22 - 2x + 4 &> 0 \\ \Leftrightarrow 30 &> 0 \\ \Rightarrow S_2 &= \mathbb{R} \cap (-\frac{11}{2}, 2) = (-\frac{11}{2}, 2). \end{aligned}$$

(iii) si $x \in (2, \infty)$,

$$\begin{aligned} & \frac{2(x-2) + 2(2x+11) - (x-2)(x+(x-2))}{(x-2)} < 0 \\ & \Leftrightarrow 2x - 4 + 4x + 22 - (x-2)(2x-2) < 0 \\ & \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 > 0 \\ & \Leftrightarrow (x-7)(x+1) > 0 \\ & \Rightarrow S_3 = \left[(-\infty, -1) \cup (7, \infty) \right] \cap (2, \infty) = (7, \infty). \end{aligned}$$

(iv) veamos si los puntos críticos satisfacen (2),
 $x = 2$, no satisface, pues no se puede anular el denominador.
 $x = -\frac{11}{2}$, si satisface pues

$$\frac{\left| -\frac{11}{2} - 2 \right| + |0|}{\left(-\frac{11}{2} - 2 \right) \left| -\frac{11}{2} + \left| -\frac{11}{2} - 2 \right| \right|} = -\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$$

Finalmente la solución de (2) es

$$S_f = (-\infty, 2) \cup (7, \infty).$$

c) Primero notamos que $1 + x^2 > 0$, luego $|1 + x^2| = 1 + x^2$, luego debemos resolver

$$|x^2 + 3x| + x|x + 3| + x^2 \geq 7 + 1 + x^2.$$

es decir

$$\begin{aligned} & |x^2 + 3x| + x|x + 3| \geq 8. \\ & \Leftrightarrow (|x| + x)|x + 3| \geq 8. \end{aligned}$$

cuyos puntos críticos son $x = -3$, $x = 0$.

(i) si $x \in (-\infty, -3)$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow (|x| + x)|x + 3| \geq 8 \\ & \Leftrightarrow (-x + x)[-(x + 3)] \geq 8 \\ & \Leftrightarrow 0 \geq 8 \\ & \Rightarrow S_1 = \phi \cap (-\infty, -3) = \phi. \end{aligned}$$

(ii) si $x \in (-3, 0)$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow (|x| + x)|x + 3| \geq 8 \\ & \Leftrightarrow (-x + x)[(x + 3)] \geq 8 \\ & \Leftrightarrow 0 \geq 8 \\ & \Rightarrow S_2 = \phi \cap (-3, 0) = \phi. \end{aligned}$$

(iii) si $x \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (|x| + x)|x + 3| \geq 8 \\ &\Leftrightarrow (x + x)[(x + 3)] \geq 8 \\ &\Leftrightarrow x(x + 3) \geq 4 \\ &\Leftrightarrow (x + 4)(x - 1) \geq 0 \\ &\Rightarrow S_3 = \left[(-\infty, -4] \cup [1, \infty) \right] \cap (0, \infty) = [1, \infty) \end{aligned}$$

(iv) veamos si los puntos críticos satisfacen: $x = 0$, no satisface pues sino se tendría que $0 \geq 8$.

$x = -3$, no satisface por la misma razón.

Por lo tanto la solución final es

$$S_f = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [1, \infty)$$

d) debemos encontrar la solución de la inecuación

$$\frac{|x^2 - 2x + 1|}{|x^2 - 3x + 2|} \leq 1. \quad (4)$$

que se puede escribir como

$$\frac{|x - 1||x - 1|}{|x - 2||x - 1|} \leq 1. \quad (5)$$

luego notamos que $x = 1$ y $x = 2$, no pueden satisfacer (4), por lo tanto podemos suponer que $x \neq 1$ y $x \neq 2$, así (4), es equivalente a

$$|x - 1| \leq |x - 2|$$

cuyos puntos críticos son $x = 1$ y $x = 2$.

(i) si $x \in (-\infty, 1)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow |x - 1| \leq |x - 2| \\ &\Leftrightarrow -x + 1 \leq -x + 2 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq 2 \\ &\Rightarrow S_1 = \mathbb{R} \cap (-\infty, 1) = (-\infty, 1). \end{aligned}$$

(ii) si $x \in (1, 2)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow |x - 1| \leq |x - 2| \\ &\Leftrightarrow x - 1 \leq -x + 2 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2} \\ &\Rightarrow S_2 = (1, 2) \cap (-\infty, \frac{3}{2}] = (1, \frac{3}{2}]. \end{aligned}$$

(iii) $x \in (2, \infty)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow |x-1| \leq |x-2| \\ &\Leftrightarrow x-1 \leq x-2 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq -2 \\ &\Rightarrow S_3 = \phi \cap (2, \infty) = \phi. \end{aligned}$$

Luego la solución de (4) es

$$S_f = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (-\infty, 1) \cup (1, \frac{3}{2}].$$

e) debemos encontrar el conjunto solución de la inecuación

$$|x||x-2| + x|x+3| \leq 3 \quad (6)$$

cuyos puntos críticos son $x = -3$, $x = 0$, $x = 2$.

(i) si $x \in (-\infty, -3)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow |x||x-2| + x|x+3| \geq 3 \\ &\Leftrightarrow x(x-2) - x(x+3) \geq 3 \\ &\Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{5} \\ &\Rightarrow S_1 = (-\infty, -3) \cap (-\infty, \frac{3}{5}] = (-\infty, -3). \end{aligned}$$

(ii) si $x \in (-3, 0)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow |x||x-2| + x|x+3| \geq 3 \\ &\Leftrightarrow x(x-2) + x(x+3) \geq 3 \\ &\Leftrightarrow 2(x-1)(x+\frac{3}{2}) \geq 0 \\ &\Rightarrow S_2 = \left[(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [1, \infty)\right] \cap (-3, 0) = (-3, -\frac{3}{2}]. \end{aligned}$$

(iii) si $x \in (0, 2)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow |x||x-2| + x|x+3| \geq 3 \\ &\Leftrightarrow -x(x-2) + x(x+3) \geq 3 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{3}{5} \\ &\Rightarrow S_3 = [\frac{3}{5}, \infty) \cap (0, 2) = [\frac{3}{5}, 2). \end{aligned}$$

(iv) si $x \in (2, -\infty)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow |x||x-2| + x|x+3| \geq 3 \\ &\Leftrightarrow x(x-2) + x(x+3) \geq 3 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x-1)\left(x + \frac{3}{2}\right) \geq 0 \\ &\Rightarrow S_3 = \left[(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [1, \infty)\right] \cap (2, \infty) = (2, \infty). \end{aligned}$$

(v) veamos si los puntos críticos satisfacen (6).

$x = -3$, si satisface pues $|-3| - 3 - 2| = 15 \geq 3$.

$x = 0$, no satisface pues sino $0 \geq 3$.

$x = 2$, si satisface pues $2|2+3| = 10 \geq 3$.

$$S_5 = \{-3, 2\}$$

Finalmente la solución de (6) es

$$S_f = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{5}, \infty\right).$$