

Semana 1

P1. Usando exclusivamente los axiomas de los reales y mencionándolos claramente cada vez que los use, demuestre las siguientes propiedades. Si ocupa alguna otra propiedad entonces deberá demostrarla indicando los axiomas que use en ello.

a) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \neq 0, (x + y)(x^{-1}y^{-1}) = x^{-1} + y^{-1}$

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \neq 0, (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$

c) Usando (b), demostrar que $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, b, d \neq 0, ab^{-1} + cd^{-1} = (ad + cb)(bd)^{-1}$

d) $\forall a \in \mathbb{R}, a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$

Solución

a) notemos que la condición $x, y \neq 0$ garantiza que x^{-1}, y^{-1} existen, luego

$$\begin{aligned}(x + y)(x^{-1}y^{-1}) &= x(x^{-1}y^{-1}) + y(x^{-1}y^{-1}) && \text{(distributividad)} \\ &= x(x^{-1}y^{-1}) + y(y^{-1}x^{-1}) && \text{(conmutatividad)} \\ &= (xx^{-1})y^{-1} + (yy^{-1})x^{-1} && \text{(asociatividad)} \\ &= 1y^{-1} + 1x^{-1} && \text{(inverso } \cdot \text{)} \\ &= y^{-1} + x^{-1} && \text{(neutro } \cdot \text{)} \\ &= x^{-1} + y^{-1} && \text{(conmutatividad)}\end{aligned}$$

b) de nuevo la condición $x, y \neq 0$ garantiza la existencia de x^{-1}, y^{-1} . Probemos ahora que $y^{-1}x^{-1}$ es el inverso de xy , luego por la unicidad del inverso concluiremos que $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. en efecto

$$\begin{aligned}(xy)(y^{-1}x^{-1}) &= x(yy^{-1})x^{-1} && \text{(asociatividad)} \\ &= x(1x^{-1}) && \text{(inverso } \cdot \text{)} \\ &= xx^{-1} && \text{(neutro } \cdot \text{)} \\ &= 1 && \text{(inverso } \cdot \text{)}\end{aligned}$$

c) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b, d \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
 (ad + cb)(bd)^{-1} &= (ad + cb)(d^{-1}b^{-1}) && \text{(parte (b))} \\
 &= (ad)(d^{-1}b^{-1}) + (cb)(d^{-1}b^{-1}) && \text{(distributividad)} \\
 &= (ad)(d^{-1}b^{-1}) + (cb)(b^{-1}d^{-1}) && \text{(conmutatividad)} \\
 &= a(dd^{-1})b^{-1} + c(bb^{-1})d^{-1} && \text{(asociatividad)} \\
 &= a(1 \cdot b^{-1}) + c(1 \cdot d^{-1}) && \text{(inverso } \cdot \text{)} \\
 &= ab^{-1} + cd^{-1} && \text{(neutro } \cdot \text{)}
 \end{aligned}$$

lo que prueba lo pedido.

d) Si $a = 0$, no hay nada que probar. Tomemos ahora $a \neq 0$ y supongamos que $a^2 = 0$, entonces multiplicando por a^{-1} (que existe pues $a \neq 0$), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 a^2 &= 0 \\
 a^{-1}(aa) &= a^{-1} \cdot 0 && \text{(multiplicando por } a^{-1} \text{)} \\
 (aa^{-1})a &= 0 && \text{(asociatividad y def de 0)} \\
 1 \cdot a &= 0 && \text{(inverso } \cdot \text{)} \\
 a &= 0 && \text{(neutro } \cdot \text{)}
 \end{aligned}$$

P2. Usando **sólo** los axiomas de los números reales y las unicidades de los inversos, demuestre las siguientes propiedades (si necesita alguna propiedad extra, **debe demostrarla**).

a) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $(-x)+(-y)$ es inverso aditivo de $x + y$.

b) Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son tales que se verifica la relación $ad + (-cb) = 0$ entonces

$$[(a + b)d] + [-(c + d)b] = 0.$$

c) Para $a \neq 0$, $-a(a^{-1}) = (-a)^{-1}$.

Solución

a) para demostrar que $(-x) + (-y)$ es inverso aditivo de $x + y$, debemos probar que

$$[(-x) + (-y)] + (x + y) = 0 \tag{1}$$

y que

$$(x + y) + [(-x) + (-y)] = 0 \tag{2}$$

probaremos sólo (1) y (2) se deja de ejercicio.

$$\begin{aligned}
 [(-x) + (-y)] + (x + y) &= [(-y) + (-x)] + (x + y) && \text{(conmutatividad)} \\
 &= (-y) + ((-x) + x) + y && \text{(asociando)} \\
 &= (-y) + (0 + y) && \text{(inverso +)} \\
 &= (-y) + y && \text{(neutro +)} \\
 &= 0 && \text{(inverso +)}
 \end{aligned}$$

b) Supongamos que $(ad) + (-cb) = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
 [(a + b)d] + [-(c + d)b] &= [(ad) + (bd)] + [-(cb) + (db)] && \text{(distributividad)} \\
 &= [(ad) + (bd)] + [(-cb) + (-db)] && \text{(parte (a))} \\
 &= [(ad) + (bd)] + [(-bd) + (-cb)] && \text{(conmutatividad)} \\
 &= (ad) + [(bd) + (-bd)] + (-cb) && \text{(asociatividad)} \\
 &= (ad) + 0 + (-cb) && \text{(inverso +)} \\
 &= (ad) + (-cb) && \text{(neutro +)} \\
 &= 0 && \text{(hipótesis)}
 \end{aligned}$$

c) notemos que

$$\begin{aligned}
 0 &= 0 \cdot (a^{-1}(-a)^{-1}) && \text{(definición de 0)} \\
 &= (a + (-a))(a^{-1}(-a)^{-1}) && \text{(inverso +)} \\
 &= a(a^{-1}(-a)^{-1}) + (-a)(a^{-1}(-a)^{-1}) && \text{(distributividad)} \\
 &= a(a^{-1}(-a)^{-1}) + (-a)((-a)^{-1}a^{-1}) && \text{(conmutatividad)} \\
 &= (aa^{-1})(-a)^{-1} + ((-a)(-a)^{-1})a^{-1} && \text{(asociatividad)} \\
 &= 1 \cdot (-a)^{-1} + 1 \cdot a^{-1} && \text{(neutro \cdot)} \\
 &= (-a)^{-1} + a^{-1} && \text{(neutro +)}
 \end{aligned}$$

por lo tanto $0 = (-a)^{-1} + a^{-1}$, de donde se obtiene que $-a^{-1} = (-a)^{-1}$.

P3. Usando propiedades elementales de los números reales, demuestre que para todo $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, $w \neq 0$, $z \neq 0$ lo siguiente es verdadero

$$(xw + yz)^2 = (x^2 + y^2)(w^2 + z^2) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x = \lambda, y = \lambda z$$

Para ello note en primer lugar que la igualdad del lado izquierdo permite deducir que $x^2z^2 + y^2w^2 = 2xwyz$. Luego, vea que esto último implica que $xz = yw$. Finalmente, de la igualdad anterior deduzca la conclusión.

Solución

Desarrollemos la expresión $(xw + yz)^2 = (x^2 + y^2)(w^2 + z^2)$;

$$\begin{aligned}(xw + yz)^2 &= (x^2 + y^2)(w^2 + z^2) \\(xw)^2 + 2xwyz + (yz)^2 &= x^2w^2 + y^2w^2 + x^2z^2 + y^2z^2 \\2xwyz &= y^2w^2 + x^2z^2 \\(yw - xz)^2 &= 0\end{aligned}$$

por lo tanto $yw - xz = 0$, es decir $yw = xz$, y por lo tanto existe una constante μ tal que $yw = xz = \mu$.

Por otro lado la condición $z, w \neq 0$ implica que z, w poseen inverso, luego multiplicando la ecuación anterior por $w^{-1}z^{-1}$, se obtiene:

$$yz^{-1} = xw^{-1} = \mu(w^{-1}z^{-1})$$

entonces tomando $\lambda = \mu(w^{-1}z^{-1})$, se tiene que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $x = \lambda, y = \lambda z$.