

Integrantes: Nicolás Celis
Ignacio Cano
Bernardo Candia

Sebastián Bogado
Hugo Carrillo
Francisca Carrasco.

Sesión 6.
Grupo 3.

P2 (a). Sea A el cto solución de la inecuación $|x| \leq |x-1|$ y sea B el cto solución de la inecuación $|4x-2| > x(1-2x)$.

- Resuelva las inecuaciones, esto es, determine A y B .
- Calcule $A \cup B$, $A \cap B$.

Solución.

$$\begin{aligned} |x| \leq |x-1| \quad (-\infty, 0): -x \leq 1-x &\Leftrightarrow 0 \leq 1 \quad x \in (-\infty, 0) \\ [0, 1]: x \leq 1-x &\Rightarrow 2x \leq 1 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2} \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ (1, +\infty): x \leq x-1 &\Rightarrow 0 \leq -1 \quad \emptyset \end{aligned}$$

$$\therefore A = (-\infty, \frac{1}{2}]$$

$$|4x-2| > x(1-2x) \Leftrightarrow 4x-2 < -x(1-2x) \vee x(1-2x) < 4x-2$$

	-2	$\frac{1}{2}$	2
$x-2$	-	-	+
$x-\frac{1}{2}$	-	0	+
$x+2$	-	+	+
$(x-2)(x-\frac{1}{2})$	+	+	+
$(x+2)(x-\frac{1}{2})$	+	0	+

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 4x-2 < -x+2x^2 \vee x-2x^2 < 4x-2 \\ \Leftrightarrow 0 < 2x^2-5x+2 \vee 0 < 2x^2+3x-2 \\ \Leftrightarrow 0 < 2(x-2)(x-\frac{1}{2}) \vee 0 < 2(x-\frac{1}{2})(x+2) \\ \Rightarrow x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty) \vee x \in (-\infty, -2) \cup (\frac{1}{2}, +\infty) \end{aligned}$$

$$\therefore B = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$$

$$\text{Luego } A \cup B = (-\infty, \frac{1}{2}] \cup \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} = \mathbb{R}.$$

$$A \cap B = (-\infty, \frac{1}{2}] \cap \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} = (-\infty, \frac{1}{2}).$$

Problema elegido por nosotros:

P1 (a) Dem que $\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0 \quad (x+y)(x^{-1}+y^{-1}) \geq 4$.

Solución.

$$\text{Por propiedad } x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}: (x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \quad ; \text{ como } xy > 0 \text{ la desigualdad no cambia si dividimos el.}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \quad | +2 \text{ (por prop } x \leq y \Rightarrow x+a \leq y+a)$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1 \geq 4 \quad ; \text{ pero } 1 = x \cdot x^{-1} = y \cdot y^{-1} \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

$$\Rightarrow x \cdot x^{-1} + x \cdot y^{-1} + y \cdot x^{-1} + y \cdot y^{-1} \geq 4 \quad ; \text{ por distributividad}$$

$$\Rightarrow (x+y)(x^{-1}+y^{-1}) \geq 4$$

Grupo 10

Carmen Maturana
 Sainne Molina
 Mikenko Matulic
 Moises Michelow
 Tomas Mendez
 Esteban Melledo

P2. (a) $|x| \leq |x-1|$

Caso 1) $x < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$
 como $-1 < 0$ entonces $x-1 < 0$ ✓

$$-x \leq -(x-1) \quad / \cdot (-1)$$

$$x \geq x-1 \quad / + (-x)$$

$$x-x \geq (x-1)-x$$

$$0 \geq -1 \quad \checkmark$$

Esta afirmación es $\forall \forall x \in \mathbb{R}$ ✓
 luego $S_1 = (-\infty, 0)$ ✓

Caso 2) $0 \leq x < 1 \Leftrightarrow x \in [0, 1)$ ✓

$$|x| = x \quad \checkmark$$

$$|x-1| = -(x-1) \text{ pues } x-1 < 0 \quad \checkmark$$

$$|x| \leq |x-1|$$

$$x \leq -(x-1) \quad \checkmark$$

$$x \leq -x+1 \quad / +x$$

$$x+x \leq (-x+1)+x$$

$$2x \leq 1 \quad / \cdot 2^{-1}$$

$$x \leq 1 \cdot 2^{-1}$$

$$x \leq \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

luego, $S_2 = [0, \frac{1}{2}]$ ✓

$$A = (-\infty, 0) \cup [0, \frac{1}{2}] \cup \emptyset = (-\infty, \frac{1}{2}] \quad \checkmark$$

Caso 3) $x \geq 1 \geq 0$

$$|x| \leq |x-1|$$

$$x \leq x-1 \quad / + (-x)$$

$$x-x \leq (x-1)-x \quad \checkmark$$

$$0 \leq -1 \quad \checkmark$$

Esta afirmación es F
 $S_3 = \emptyset$ ✓

$$|4x-2| > x(1-2x)$$

$$2(2x-1) > x(1-2x) \rightarrow \text{Sólo hay un punto crítico: } x = 1/2$$

$$\text{Caso 1: } x < 1/2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1/2)$$

$$-2(2x-1) > x(1-2x)$$

$$-4x+2 > x-2x^2 \quad | +2x^2$$

$$(-4x+2) + 2x^2 > (x-2x^2) + 2x^2$$

$$2x^2 - 4x + 2 > x \quad | +(-x)$$

$$(2x^2 - 4x + 2) - x > x - x$$

$$2x^2 - 5x + 2 > 0$$

$$\rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$$

$$(2x-1)(x-2) > 0$$

$$\rightarrow \text{puntos críticos } x = 1/2 \wedge x = 2$$

$$-\infty \quad 1/2 \quad 2 \quad +\infty$$

$$2x-1 \quad - \quad 0 \quad + \quad +$$

$$x-2 \quad - \quad - \quad 0 \quad +$$

$$(2x-1)(x-2) \quad + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$$

$$S_1 = (-\infty, 1/2)$$

$$\text{Caso 2: } x \geq 1/2 \Leftrightarrow x \in [1/2, +\infty)$$

$$2(2x-1) > x(1-2x)$$

$$4x-2 > x-2x^2 \quad | +2x^2$$

$$2x^2 + 4x - 2 > x \quad | +(-x)$$

$$2x^2 + 3x - 2 > 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25$$

$$(2x-1)(x+2) > 0$$

$$-\infty \quad -2 \quad 1/2 \quad +\infty$$

$$x+2 \quad - \quad 0 \quad + \quad +$$

$$2x-1 \quad - \quad - \quad 0 \quad +$$

$$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$$

$$S_2 = (1/2, +\infty)$$

$$\therefore B = (-\infty, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$$

$$= (-\infty, +\infty) \setminus \{1/2\}$$

al hacer los incrementos
no es necesario que expliciten
cada paso, para que no pierdan
tiempo en eso en el control
(sólo en la pregunta de exámenes
hagan eso, ni se los piden)

$$A \cup B = (-\infty, 1/2] \cup [(-\infty, +\infty) \setminus \{1/2\}] = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$A \cap B = (-\infty, 1/2] \cap [(-\infty, +\infty) \setminus \{1/2\}] = (-\infty, 1/2)$$

P2 (c) $|x^2 + 3x| + x|x+3| + x^2 \geq 7 + |1+x^2|$

$$|x(x+3)| + x|x+3| + x^2 \geq 7 + |1+x^2|$$

Primero, notemos que $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > 0$ (pues $x^2 \geq 0 \wedge 1 > 0$)

Luego, $|1+x^2| = 1+x^2$

Puntos críticos: $x=0 \wedge (x+3=0 \Leftrightarrow x=-3)$

Caso 1: $x < -3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3)$

En este caso, $x < 0$

$$(-x)(-(x+3)) + x(-(x+3)) + x^2 \geq 7 + 1 + x^2$$

$$x^2 + 3x - x^2 - 3x + x^2 \geq 8 + x^2$$

$$x^2 \geq 8 + x^2 \quad / + (-x^2)$$

$$0 \geq 8 \quad S_1 = \emptyset$$

Caso 2: $-3 \leq x < 0 \Leftrightarrow x \in [-3, 0)$

$$(-x)(x+3) + x(x+3) + x^2 \geq 7 + 1 + x^2$$

$$-x^2 - 3x + x^2 + 3x + x^2 \geq 8 + x^2$$

$$x^2 \geq 8 + x^2 \quad / + (-x^2)$$

$$0 \geq 8 \quad S_2 = \emptyset$$

Caso 3: $x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, +\infty)$

En este caso, $x+3 > 0$

$$x(x+3) + x(x+3) + x^2 \geq 7 + 1 + x^2$$

$$x^2 + 3x + x^2 + 3x + x^2 \geq 8 + x^2$$

$$3x^2 + 6x \geq 8 + x^2 \quad / + (-x^2)$$

$$2x^2 + 6x \geq 8 \quad / + (-8)$$

$$2x^2 + 6x - 8 \geq 0 \quad / \cdot 2^{-1}$$

$$x^2 + 3x - 4 \geq 0$$

(Igual que antes, no
nos necesitamos explicar
todos los pasos. Lo
moderato, muy bien
hecho.)

Puntos críticos: $\leftarrow (x+4)(x-1) \geq 0 \quad \therefore S_3 = [1, +\infty)$

$$x = -4$$

$$y \quad x = 1$$

	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
x^2+3x-4	$+$	0	$-$	$+$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [1, +\infty)$$

$$P2(b) \quad \frac{|x-2| + |2x+11|}{(x-2)|x+1|} < \frac{1}{2}$$

tenemos que la suma de módulos siempre es positiva, y si $x < 2$, siempre se cumple la inecuación debido a que $(x-2)$ sea negativo, entonces:

$$\frac{\text{positivo}}{\text{negativo} \cdot (\text{positivo})} < \frac{1}{2} \text{ es cierto. } \text{muy bien pensado.}$$

Ahora hay q' probar con $x > 2$

$$\frac{(x-2) + (2x+11)}{(x-2)(x+(x-2))} < \frac{1}{2}$$

$$2(3x+9) < (x-2)(2x-2)$$

$$6x + 18 < 2x^2 - 2x - 4x + 4 \quad | -6x - 18$$

$$0 < 2x^2 - 12x - 14 \quad |:2$$

$$0 < (x^2 - 6x - 7)$$

$$0 < (x-7)(x+1)$$

	-1	7
$(x-7)$	-	- 0 +
$(x+1)$	- 0 +	+
$(x-7)(x+1)$	+	- +

$$\text{sol} \quad (-\infty, -1) \cup (-\infty, 2) \cup (7, +\infty)$$

$$\text{sol} = (-\infty, 2) \cup (7, +\infty)$$

Grupo 6

Manuel García

Estefanía Farías

Carolina Geoproid

Francisco Flores

Nicolás Fernández

Jetro Gaimza

P2 (d) Encuentre el conjunto solución de la sgte. ec.

$$\frac{|x^2 - 2x + 1|}{|x^2 - 3x + 2|} \leq 1 \quad \begin{matrix} x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{matrix}$$

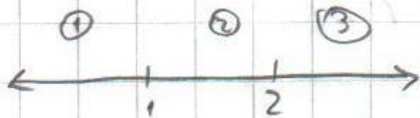
$$\frac{|(x-1)(x-1)|}{|(x-2)(x-1)|} \leq 1$$

$$\frac{|x-1||x-1|}{|x-2||x-1|} \leq 1$$

$$\frac{|x-1|}{|x-2|} \leq 1$$

$$|x-1| \leq |x-2| \quad x \neq 1 \quad x \neq 2$$

casos



Resolución de casos

① Si $x \leq 1$ $-(x-1) \leq -(x-2)$
 $-x+1 \leq -x+2$

$\text{sol } ① = (-\infty, 1)$

$1 \leq 2$

es cierto $\checkmark$ (todo $x \in (-\infty, 1)$ cumple la desigualdad)

② Si $x \in (1, 2)$ $x-1 \leq -(x-2)$
 $x-1 \leq -x+2$

$\text{sol } ② = (1, \frac{3}{2})$

$x \leq \frac{3}{2}$

③ Si $x \geq 2$ $x-1 \leq x-2$

$\text{sol } ③ = \emptyset$

$-1 \leq -2$

no es cierto $\checkmark$

$\text{solución} = \text{sol } ① \cup \text{sol } ② \cup \text{sol } ③$

$\text{sol} = (-\infty, 1) \cup (1, \frac{3}{2}]$

71

(b)(1) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0, x^2 + \frac{2}{x} \geq 3$

no empezar por lo que x quien piden
 ~~$x^2 + \frac{2}{x} \geq 3 \quad | \cdot x$~~

*Poner, en
últimos caso
equivalencias*

$x^3 + 2 \geq 3x \quad | +(-3x)$

$x^3 - 3x + 2 \geq 0$

$(x^2 - 2x + 1)(x + 2) \geq 0 \rightarrow$ POR DISTRIBUTIVIDAD

$(x-1)(x-1)(x+2) \geq 0 \rightarrow$ POR DISTRIBUTIVIDAD

$(x-1)^2(x+2) \geq 0 \rightarrow$ POR ~~DEFINICIÓN~~ (*)

*empezar con esto y llegar
a lo de arriba (no empezar suponiendo
lo que quieren demostrar)*

POR PROPIEDAD DE CUADRADO TENEMOS QUE
SIEMPRE $(x)^2 \geq 0$ POR LO TANTO $(x-1)^2 \geq 0$
Y ADemás $(x+2) > 0$ POR ^{$x > 0 \Rightarrow x+2 > 2$} DEFINICIÓN. POR
PROPIEDAD CERRADA A MULTIPLICACIÓN VA A
ESTAR SIEMPRE ENTRE LOS $\mathbb{R}^+$ EN EL CASO

$(x-1)^2 \neq 0$

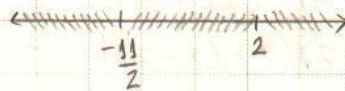
POR OTRO LADO, EN EL CASO EN QUE
 $(x-1)^2 = 0$ POR PROPIEDAD DE LA
TABLA DEL CERO ($0 \cdot (x+2) = 0$)

luego $\forall x > 0, (x-1)^2(x+2) \geq 0$
 (*)

TRABAJO DIVIDIDO 2:

P2.

$$b) \frac{|x-2| + |2x+11|}{(x-2)|x| + |x-2|} < \frac{1}{2}$$



• Caso 1: $x \leq -\frac{11}{2}$

$$\frac{-(x-2) + -(2x+11)}{(x-2)/(x-(x-2))} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{-x+2-2x-11}{(x-2)(x-x+2)} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{-3x-9}{2(x-2)} < \frac{1}{2}$$

$$x \leq -\frac{11}{2} \wedge x < -\frac{7}{4}$$

$$2(-3x-9) > 2(x-2)$$

$$-3x-x > -2+9$$

$$-4x > 7$$

$$x < -\frac{7}{4}$$

Intervalo solución 1 = $(-\infty, -\frac{11}{2}]$

• Caso 2: $-\frac{11}{2} < x < 2$

$$\frac{-(x-2) + (2x+11)}{(x-2)/(x-(x-2))} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{-x+2+2x+11}{(x-2)/(x-x+2)} < \frac{1}{2}$$

$$x < 2 \wedge x > -\frac{11}{2}$$

$$\frac{x+13}{(x-2) \cdot 2} < \frac{1}{2}$$

Intervalo solución 2 = $(-\frac{11}{2}, 2)$

$$2(x+13) > 2(x-2) \quad (\text{para } (x-2) < 0)$$

$$x+13 > x-2$$

$$13 > -2$$

- Caso 3: $x > 2$.

$$\frac{(x-2) + (2x+11)}{(x-2)(x+(x-2))} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{x-2+2x+11}{(x-2)(x+x-2)} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{3x+9}{(x-2)(2x-2)} < \frac{1}{2}$$

$x > 2 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow 2x-2 > 0$
 $\Rightarrow |2x-2| = 2x-2$

$$2(3x+9) < (x-2)(2x-2) \quad \left(\text{por } (x-2) \text{ y } (2x-2) > 0 \text{ en este caso} \right)$$

$$6x+18 < 2x^2-6x+4$$

$$0 < 2x^2-12x-14 \quad | : 2$$

$$0 < x^2-6x-7$$

$$0 < (x-7)(x+1)$$

- caso a: $(x-7) > 0 \quad \wedge \quad (x+1) > 0 \quad \text{sol: } (7, +\infty)$
 $x > 7 \quad \wedge \quad x > -1$

- caso b: $(x-7) < 0 \quad \wedge \quad (x+1) < 0 \quad \text{sol: } (-\infty, -1)$
 $x < 7 \quad \wedge \quad x < -1$

Intervalo solución $= ((-\infty, -1) \cup (7, +\infty)) \cap (2, +\infty) = (7, +\infty)$
 sol: $(7, +\infty)$

- Caso 4: $x = 2$.

$$\frac{|2-2| + |2 \cdot 2 + 11|}{(2-2)|2 + |2-2|} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{0 + 15}{0 \cdot 2} < \frac{1}{2}$$

(indefinido para $x=2$)

preciso.
 No hace caso, decir solamente que $x=2 \notin S$ por la indefinición

SOLUCIÓN: $(-\infty, -1/2] \cup (-1/2, 2) \cup (7, +\infty)$
 $(-\infty, 2) \cup (7, +\infty)$

Natalia D'empessailles, Elina Diaz Carniglia, Lucas Enriquez,

Lilí Erato, Sebastián Espartero.

(d)

$$\frac{|x^2 - 2x + 1|}{|x^2 - 3x + 2|} \leq 1$$

$$\left| \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2} \right| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2} \leq 1$$

~~Completar el cuadrado~~

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2} \geq -1 \quad \wedge \quad \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2} \leq 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} \geq -1 \quad \wedge \quad \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} \leq 1$$

$$\frac{x-1}{x-2} + 1 \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{(x-1)}{(x-2)} - 1 \leq 0$$

$$\frac{x-1+x-2}{x-2} \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{x-1-(x-2)}{x-2} \leq 0$$

$$\frac{2x-3}{x-2} \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{-3}{x-2} \leq 0$$

$$\bullet \left(\begin{array}{l} 2x-3 \geq 0 \quad \wedge \quad x-2 \geq 0 \\ x \geq 3/2 \quad \wedge \quad x \geq 2 \end{array} \right) \quad \bullet \left(\begin{array}{l} -3 \geq 0 \quad \wedge \quad x-2 \geq 0 \end{array} \right)$$

$$\bullet \begin{array}{l} 2x-3 \leq 0 \quad \wedge \quad x-2 \leq 0 \\ x \leq 3/2 \quad \wedge \quad x \leq 2 \end{array} \quad \bullet \left(\begin{array}{l} -3 \leq 0 \quad \wedge \quad x-2 \leq 0 \\ x \leq 2 \end{array} \right)$$

$$\text{conj solución } \left([2, +\infty) \cup (-\infty, 3/2] \right) \cap (-\infty, 2]$$

$= (-\infty, 3/2]$ (en 1 se anula el denominador de la ecuación, hay que quitárselo)

$$S = (-\infty, 3/2] \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, 3/2]$$

(si hubiese salido el 2 también habría que removerlo)