

P2 $\Rightarrow$ pag 21

Usando "sólo" los axiomas de los números reales y las unicidades de los inversos demuestre las siguientes propiedades (si se necesita alguna propiedad extra debe demostrarla).

(a) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ $(-x) + (-y)$ es el inverso aditivo de $x+y$.

Se supone que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$-(x+y) + (x+y) = 0$$

Ahora Probamos que

no se debe partir de lo que hay que demostrar

Exo
está
bien

hip!

$$\begin{aligned} &((-x) + (-y)) + (x+y) = 0 \\ &((-y) + (-x)) + (x+y) = 0 \\ &(-y) + [(-x) + (x+y)] = 0 \\ &(-y) + [((-x) + x) + y] = 0 \\ &(-y) + [0 + y] = 0 \\ &(-y) + y = 0 \\ &0 = 0 \end{aligned}$$

Commutatividad
Asociatividad
Asociatividad
elemt. inverso
elemt. neutro
elemt. inverso

en efecto la igualdad se cumple, $0=0$ es Verdadero por lo tanto nuestro hip también lo es

$\rightarrow$ Por unicidad de inverso

$-(x+y) = (-x) + (-y)$ integrantes

Grupo 6

Este fania	Farias
Nicolás	Fernandez
Francisco	Flores
Jeluo	Garcia
Manuel	Garcia
Candina	Geoffroy

b) Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son tales que se verifica la relación $ad + (-cb) = 0$ entonces

$$\underline{[(a+b)d] + [-((c+d)b)] = 0}$$

$$[(a+b)d] + [-((c+d)b)] =$$

$$= [ad + bd] + [-cb + db]$$

$$= (ad + bd) + ((-cb) + (-db))$$

$$= (ad + bd) + ((-db) + (-cb))$$

$$= ad + [bd + ((-db) + (-cb))]$$

$$= ad + [(bd + (-db)) + (-cb)]$$

$$\Rightarrow ad + [(db + (-db)) + (-cb)]$$

$$= ad + [0 + (-cb)]$$

$$= ad + (-cb)$$

$$= 0$$

(Distributividad)

propiedad ejercicio (a) ✓

comutatividad

Asociatividad

Asociatividad

comutatividad

elemt. inverso

elemt. neutro

igualdad

c) Para $a \neq 0$, $-(a^{-1}) = (-a)^{-1}$

$$-(a^{-1}) = (-1) \cdot (a^{-1}) \quad * 1$$

Propiedad i $(-1) \cdot b = (-1) \cdot b$

$$= (-1) \cdot b + 0$$

$$= (-1) \cdot b + b + (-b)$$

$$= [((-1) \cdot b) + b + (-b)]$$

$$= [((-1) \cdot b) + (b \cdot 1)] + (-b)$$

$$= b((-1) + 1) + (-b)$$

$$= (b \cdot 0) + (-b)$$

$$= 0 + -b$$

$$= -b$$

Propiedad ii $(a^{-1}) \cdot (b)^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$

Para demostrar que es cierto,

(¿Para qué?)

$$(a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1} = 1, \text{ entonces}$$

$$(a \cdot b) \cdot (a^{-1}) \cdot (b^{-1}) = 1 \text{ debe ser cierto}$$

(c) Para $a \neq 0$, $-(a^{-1}) = (-a)^{-1}$

no se puede
suponer arribando
cierto lo que se
quiere demostrar

$$-(a^{-1}) \stackrel{?}{=} (-a)^{-1}$$

$$(-1)(a^{-1}) = (-1 \cdot a)^{-1}$$

$$(-1)(a^{-1}) = (-1^{-1} \cdot a^{-1})$$

propiedad i
propiedad ii

propiedad

multiplicativa en

inverso multiplicativo

elemento neutro para

multiplicación

Propiedad i $(-1) \cdot b = -b$

$$(-1) \cdot b = (-1) \cdot b$$

$$= (-1) \cdot b + 0$$

$$= [((-1) \cdot b) + b + (-b)]$$

$$= [((-1) \cdot b) + (b \cdot 1)] + (-b)$$

$$= b((-1) + 1) + (-b)$$

$$= (b \cdot 0) + (-b)$$

$$= 0 + (-b)$$

$$= -b$$

$$(-1)(a^{-1}) = (-1^{-1} \cdot a^{-1})$$

$$(1) \cdot (1^{-1})(-1)(a^{-1}) = (-1^{-1} \cdot a^{-1})$$

$$(1^{-1})(-1)(a^{-1}) = (-1^{-1} \cdot a^{-1})$$

$$(-1^{-1})(a^{-1}) = (-1^{-1} \cdot a^{-1})$$

$$(-1^{-1} \cdot a^{-1}) = (-1^{-1} \cdot a^{-1})$$

elemento neutro para
multiplicación

propiedad i

asociatividad

Bastaba probar $(-a) \cdot (-a^{-1}) = 1$

Propiedad ii $(a \cdot b) \cdot [(a^{-1}) \cdot (b^{-1})] = [a \cdot b \cdot a^{-1}] \cdot (b^{-1})$
 $= [a \cdot a^{-1} \cdot b] \cdot (b^{-1})$
 $= [1 \cdot b] \cdot (b^{-1})$
 $= b \cdot b^{-1}$
 $= 1$ ~~(Row?)~~

(en la hoja
interior)

$(-1)(a^{-1})$

Prueba de Problemas

2) Usando solo axiomas de números reales y las unicidades de los inversos.

a) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $(-x) + (-y)$ es inverso aditivo de $x+y$.

Hipótesis: $[x+y] + [(-x) + (-y)] = 0$

$$\begin{aligned}
 [x+y] + [(-x) + (-y)] &= [x+y] + [(-x) + (-y)] \\
 &= [(x+y) + (-x)] + (-y) \quad \text{Asociatividad} \\
 &= [(y+x) + (-x)] + (-y) \quad \text{Commutatividad} \\
 &= [y + (x+(-x))] + (-y) \quad \text{Asociatividad} \\
 &= [y + 0] + (-y) \quad \text{Inverso aditivo} \\
 &= y + (-y) \quad \text{Elemento neutro} \\
 &= (y + (-y)) \quad \text{Asociatividad} \\
 &= 0 \quad \text{Inverso aditivo}
 \end{aligned}$$

Se concluye que:

$$-(x+y) = (-x) + (-y)$$

b) Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son tales que se verifica la relación $(ad) + (-cb) = 0$ entonces:

Hipótesis: $[(a+b)d] + [-(c+d)b] = 0$

$$\begin{aligned}
 [(a+b)d] + [-(c+d)b] &= [(a+b)d] + [-(c+d)b] \\
 \text{Distributividad} &= [ad + bd] + [(-1)(bc + bd)] \\
 \text{Distributividad} &= [ad + bd] + [bc(-1) + bd(-1)] \\
 \text{Inverso aditivo} &= [ad + bd] + [-bc] + [-bd] \\
 \text{Commutatividad} &= [ad + bd] + [-bd] + [-bc] \\
 \text{Asociatividad} &= ad + [bd + (-bd)] + (-bc) \\
 \text{Inverso aditivo} &= ad + 0 + (-bc) \\
 \text{Commutatividad} &= ad + (-cb) \\
 \text{Propiedad asumida de "a")} &= ad + (-cb) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

desdoblarse de los paréntesis para por pasos

$$(b + (-b)) + (-bc)$$

c) Para $a \neq 0, -(a^{-1}) = (-a)^{-1}$

Propiedad 1: $(a \cdot b) + [a \cdot (-b)] = a \cdot [b + (-b)]$ Inverso aditivo
 $= a \cdot 0$ Elemento neutro
 $= 0.$

$\Rightarrow -(ab) = a(-b)$

(mostrar $\odot$
 $0 \cdot x = 0 \quad \forall x$)

Propiedad 2: $(-a) \cdot (-b) = -[(-a) \cdot b]$
 $= -[b \cdot (-a)]$ Comutatividad
 $= -[-(b \cdot a)]$
 $= a \cdot b$

Propiedad 3: $a^{-1} = P$ (en 1)

$a \cdot a^{-1} = 1$

$a \cdot P = 1 \quad | \text{en 1}$

$a \cdot P \cdot P^{-1} = 1 \cdot P^{-1} \quad | \text{Inverso multiplicativo}$

$a \cdot (P \cdot P^{-1}) = (1 \cdot P^{-1}) \quad | \text{Asociatividad}$

$a \cdot 1 = P^{-1} \quad | \text{Inverso multiplicativo}$

$a = P^{-1} \quad | \text{en 1}$

$a = (a^{-1})^{-1}$

Bastaba mencionar
 la unicidad de inversos
 y a y $(a^{-1})^{-1}$ son inversos
 mult para a^{-1}

(2) (1)
 $-(a^{-1}) = (-a)^{-1}$

Es lo que hay que probar
~~Hipótesis~~

(1) $(-a)^{-1} \cdot ((-a)^{-1})^{-1} = 1 \quad \checkmark \text{ Prop 3}$

$(-a)^{-1} \cdot (-a) = 1$

(2) $-(a^{-1}) \cdot (-a) = 1$

$-(a^{-1}) \cdot (-a) = 1$

$(-a^{-1}) \cdot (-a) = 1$

$(a^{-1} \cdot a) = 1$

hay que concluir que es 1, no
 suponerlo

Prop 2.

$1 \in \mathbb{A}$

Inverso multiplicativo

$(-a)^{-1} = -(a^{-1})$

Juegos 2
 Cesar Arredondo
 José Asmi
 María Barahona
 José Barrón
 Felipe Berrón

León 6

GRUPO 12/ sección 6

P4) Sea C un conjunto que satisface los siguientes Axiomas

A₁) $3 \in C$

A₂) Si $x \in C$, entonces $3x+1 \in C$

A₃) Si $x, y \in C$, entonces $x+y \in C$

A₄) $7 \notin C$

Demuestre que:

a) $1 \notin C$

Por contradicción:

Supongamos que $1 \in C$, entonces por Axioma 2 tenemos que:

$$3 \cdot 1 + 1 \in C$$

$$4 \in C$$

Por A₃)

Si $4, 3 \in C$, entonces $3+4 = 7 \in C$

pero por A₄) $7 \notin C$



b) Si $x, y \in C$, entonces $3x+2y+4 \in C$

Por A_2 $3x+1 \in C$ ✓

Por A_3 $(3x+1)+y \in C$ ✓

Por A_3 $(3x+1+y)+y \in C$ ✓

Por A_1 como $3 \in C$ entonces ✓

Por A_2 $(3x+2y+1)+3 \in C$ ✓

entonces $3x+2y+4 \in C$ ✓

c) Si $x, y \in C$, entonces $4-x-y \notin C$

Supongamos que $4-x-y \in C$, entonces

Por A_3 $(4-x-y)+y \in C$ ✓

$4-x \in C$ ✓

/Asociatividad, $\bar{0}$ inverso

Por A_3 $x+(4-x) \in C$ ✓

$4 \in C$ ✓

Por A_3 como $4, 3 \in C \Rightarrow 4+3 \in C$ ✓

$7 \in C$

Pero por A_4 $7 \notin C$

$\therefore 4-x-y \notin C$ ✓

may bien ✓



d) Si $3y + z + 4 \notin C$, entonces $(y \notin C \vee \frac{z}{2} \notin C)$

Supongamos que $y \in C$ y $\frac{z}{2} \in C$ ✓

Por A_1 Si $y \in C$, entonces $3y + 1 \in C$

Por A_2 $(3y + 1) + \frac{z}{2} \in C$

Por A_3 $(3y + 1 + \frac{z}{2}) + \frac{z}{2} \in C$

| $3y + 1 + z \in C$

Por A_4 $3 \in C$

Por A_3 $(3y + 1 + z) + 3 \in C$

$3y + z + 4 \in C$ ✓ $\rightarrow$ " " $\leftarrow$

∴ $y \notin C \vee \frac{z}{2} \notin C$ ✓

e) No existe un $x \in C$, tal que $3(2x - 1) = 39$
Supongamos que existe $x \in C$ tal que

$$3(2x - 1) = 39$$

$$2x - 1 = 13$$

$$2x = 14$$

$$x = 7$$

, por A_4 $7 \notin C$ ✓

mejor leer

No existe
un $x \in C$

∴ tal que
 $3(2x - 1) = 39$

GRUPO 12

seccion 61

Habel ka
Leopoldo
Patino
Jose
Carlos
Fabian

Pinoz
Pinoz
Navarro
Artiz
Perez
Puelma

P2(a) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $(-x) + (-y)$ es inverso aditivo de $x+y$.

Se debe demostrar que:

$$(-x) + (-y) = -(x+y)$$

entonces

$$\begin{aligned} (x+y) + [(-x) + (-y)] &= 0 \\ (x+y + (-x)) + (-y) &= 0 \\ (y + x + (-x)) + (-y) &= 0 \\ y + (x + (-x)) + (-y) &= 0 \\ y + 0 + (-y) &= 0 \\ y + (-y) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

no se debe partir con lo que se quiere demostrar

Ax. Inv. ad.
Asoc.
Com.
Asoc.
Inv. Ad
Inv Ad / El. neutro

Por unicidad de inversos $-(x+y) = (-x) + (-y)$

(b) Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, son tales que se verifica la relación $(ad) + (-cb) = 0$, entonces:

$$[(a+b)d] + [-(c+d)b] = 0$$

Esto es lo que se quiere demostrar, no se puede partir de eso.

Es decir, se quiere probar que $-(c+d)b$ es el i. aditivo de $[(a+b)d]$:

$$(a+b)d = (c+d)b$$

y $(ad) + (-cb) = 0$, es igual a

$$ad = cb$$

Por lo tanto, $(a+b)d = (c+d)b$

$$ad + bd = cb + db$$

$$ad + bd = ad + db$$

$$ad + bd = ad + bd$$

X

Dist
Hip.
Comm.

c) Para $a \neq 0$

$$-(a^{-1}) = (-a)^{-1}$$

entonces

$$\begin{aligned} & -(a^{-1}) - ((-a)^{-1}) \\ & -(a^{-1}) + a^{-1} \end{aligned}$$

Inv. Aditivo

↳ Gracias a la sgte. propiedad:

$$-(-a) = a$$

Para demostrar esto, se prueba que el opuesto de $(-a)$ es a :

$$(-a) + \boxed{x} = 0$$

$$(-a) + a = 0$$

$$a + (-a) = 0$$

$$\Rightarrow -(-a) = a \quad (\text{el inverso del inverso de } a)$$

Commutatividad

Inverso Aditivo

$$-(a^{-1}) + a^{-1}$$

$$a^{-1} - (a^{-1}) = 0$$

X ?

Commut.

Inv. Aditivo

Grupo 14

Bastaba mostrar

$$(-a) \cdot (-a^{-1}) = 1$$

Integrantes:

Pedro Rojas

Rodrigo Rother

Felipe Santana

Walter Schmidt

Nicolas Seelmann

Alvaro Silva

- Carmen Gloria Paturana
- Esteban Mellado
- Poiseis Michelow
- Jaime Molina
- José Tomás Píndez

$$\begin{aligned}
 (a) \quad (x+y) + [(-x) + (-y)] &= (x+y) + [(-y) + (-x)] && \text{Commutatividad} \\
 &= \{(x+y) + (-y)\} + (-x) && \text{Asociatividad} \\
 &= \{x + (y + (-y))\} + (-x) && \text{Asociatividad} \\
 &= (x + 0) + (-x) && \text{Inverso Aditivo} \\
 &= x + (-x) && \text{Neutro Aditivo} \\
 &= 0 && \text{Inverso Aditivo}
 \end{aligned}$$

Entonces, $(-x) + (-y) = -(x+y)$ ✓

Propiedades

- Tabla del 0:

$$\begin{aligned}
 \forall x, \quad x \cdot x &= (x+0) \cdot x && \text{Neutro Aditivo} \\
 &= x \cdot x + 0 \cdot x && \text{Distributividad}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x \cdot x &= x \cdot x + 0 \cdot x && / + -(x \cdot x) \\
 x \cdot x + (-x \cdot x) &= (x \cdot x + 0 \cdot x) + -(x \cdot x) \\
 0 &= (x \cdot x + -(x \cdot x)) + 0 \cdot x && \text{Inverso Aditivo, Asociatividad} \\
 0 &= 0 + 0 \cdot x && \text{Inverso Aditivo} \\
 0 &= 0 \cdot x && \text{Neutro Aditivo}
 \end{aligned}$$

- $-a = (-1) \cdot a$

$$\begin{aligned}
 \text{Dem. } a + (-1) \cdot a &= a \cdot 1 + (-1) \cdot a && \text{Neutro Multiplicativo} \\
 &= 1 \cdot a + (-1) \cdot a && \text{Commutatividad} \\
 &= (1 + (-1)) \cdot a && \text{Distributividad} \\
 &= 0 \cdot a && \text{Inverso Aditivo} \\
 &= 0 && \text{Tabla del 0}
 \end{aligned}$$

Luego, $(-1) \cdot a = -a$ (Unicidad de Inversos) ✓

- $(-1) \cdot (-1) = 1$

Dem. $(-1) \cdot (-1) = -(-1)$
 $= 1$

$-a = (-1) \cdot a$

- $-(-1) = 1$

Dem. $1 + (-1) = 0$

$(-1) + 1 = 0$

Commutatividad

Luego, $-(-1) = 1$

$$b) (ad) + (-cb) = 0$$

$$[(a+b)d] + [-((c+d)b)] = 0.$$

$$\begin{aligned} & [(a+b)d] + [-((c+d)b)] \\ &= (ad + bd) + [- (cb + db)] \quad \checkmark \text{Distributividad.} \\ &= (ad + bd) + [- (cb + bd)] \quad \checkmark \text{Conm.} \\ &= (ad + bd) + [-cb] + [-bd] \quad \checkmark \text{Problema a)} \\ &= (ad + bd) + [-bd] + [-cb] \quad \checkmark \text{Conm.} \\ &= ad + (bd + [-bd]) + (-cb) \quad \checkmark \text{Asociatividad.} \\ &= ad + 0 + (-cd) \quad \checkmark \text{Inverso aditivo} \\ &= ad + (-cd) \quad \checkmark \text{neutro aditivo.} \\ &= 0 \quad \checkmark \text{por hipotesis.} \end{aligned}$$

paso más
no shown
en la
ecuación

$$c) p.d \quad (-a) \cdot [-(a^{-1})] = 1.$$

$$\begin{aligned} (-a) \cdot [-(a^{-1})] &= [(-1) \cdot a] \cdot [(-1) \cdot (a^{-1})] \quad \checkmark \text{Prop } -a = (-1) \cdot a \\ &= \{ [(-1) \cdot a] \cdot (-1) \} \cdot a^{-1} \quad \checkmark \text{Asoci} \\ &= \{ [a \cdot (-1)] \cdot (-1) \} \cdot a^{-1} \quad \checkmark \text{Conm.} \\ &= \{ a \cdot [(-1) \cdot (-1)] \} \cdot a^{-1} \quad \checkmark \text{Asoc} \\ &= \{ a \cdot 1 \} \cdot a^{-1} \quad \checkmark \text{Prop } (-1) \cdot (-1) = 1 \\ &= a \cdot a^{-1} \quad \checkmark \text{Neutro mult.} \\ &= 1 \quad \checkmark \text{Inverso mult.} \end{aligned}$$

Muy bien