Semana 11

31 de mayo de 2007

P2. Demuestre que $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ e $y_n = x_n - \frac{1}{n}$ son convergentes y que tiene igual límite.

Solución:

Recordemos que

$$(\forall x > 0) \quad \ln(x) \leq x - 1 \tag{1}$$

$$(\forall x > 0) \quad \ln(x) \geq 1 + \frac{1}{x} \tag{2}$$

Veamos que x_n e y_n son monótonas:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n = &\quad \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \tfrac{1}{n+1} + \ln(\tfrac{n}{n+1}) \end{aligned}$$

pero como $\frac{n}{n+1} > 0$, podemos aplicar (1) , entonces

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &\leq \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \quad x_{n+1} \leq x_n \end{aligned}$$

es decir x_n es decreciente.

análogamente para y_n:

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n = &\quad x_{n+1} - \tfrac{1}{n+1} - x_n + \tfrac{1}{n} \\ = &\quad \tfrac{1}{n+1} + \ln(\tfrac{n}{n+1}) - \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n} \\ = &\quad \tfrac{1}{n} + \ln(\tfrac{n}{n+1}) \end{aligned}$$

pero como $\frac{n}{n+1} > 0$ usando (2) tenemos:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{n} + \ln(\tfrac{n}{n+1}) \geq &\quad \tfrac{1}{n} + 1 - \tfrac{n+1}{n} \\ = &\quad 0 \end{aligned} \tag{3}$$

por lo tanto

$$y_{n+1} - y_n \geq \quad 0$$

donde hemos usado (3) y el hecho de que el logaritmo es creciente, obteniendo que:

$$y_{n+1} \geq y_n$$

es decir y_n es creciente.
de la definición de $y_n = x_n - \frac{1}{n}$ se obtiene que:

$$x_n \geq y_n$$

con todo lo anterior tenemos que:

$$y_1 \leq y_n \leq x_n \leq x_1$$

es decir ambas sucesiones son monótonas y acotadas, por lo tanto son convergentes.
tomando limite a $y_n = x_n - \frac{1}{n}$ y usando que $\frac{1}{n} \to 0$, por álgebra de limites, deducimos que ambas sucesiones tienen límites iguales.

P4. Calcule $\lim(1+a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n)-1}}$, donde (a_n) es una sucesión que converge a cero.

Solución

Recordemos primero que:

$$(\forall x \in (0,\infty)) \quad \exp(\ln(x)) = x \tag{4}$$

$$\text{Si } b_n \to b, \text{ entonces} \quad \lim \exp(b_n) = \exp(b) \tag{5}$$

$$(\forall x \in (0,\infty)) \quad \ln(x^a) = a\ln(x) \tag{6}$$

$$\text{Si } b_n \to 0,\ b_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{entonces } \lim \tfrac{\exp(b_n)-1}{a_n} = 1 \tag{7}$$

$$\text{Si } b_n \to 0,\ b_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N} \quad \text{entonces } \lim \tfrac{\ln(1+b_n)}{b_n} = 1 \tag{8}$$

Notemos que de (4) y (6)

$$(1+a_n)^{\frac{1}{exp(2a_n)-1}} = \exp\left(\ln\left((1+a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n)-1}}\right)\right)$$

y

$$\ln(1+a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n)-1}} = \frac{1}{\exp(2a_n)-1}\ln(1+a_n) = \frac{\frac{1}{2}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}}{\frac{\exp(2a_n)-1}{2a_n}}$$

sea $p_n = \frac{\ln(1+a_n)}{a_n}$, de acuerdo con (8) $p_n \to 1$, pues $a_n \to 0$.
sea $q_n = \frac{\exp(2a_n)-1}{2a_n}$, de acuerdo con (7) $q_n \to 1$, pues $2a_n \to 0$.
por lo tanto la sucesión $\frac{\frac{p_n}{2}}{q_n} \to \frac{1}{2}$, es decir $\ln\left((1+a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n)-1}}\right) \to \frac{1}{2}$, usando (5)se deduce que:

$$\exp\left(\ln\left((1+a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n)-1}}\right)\right) \to \exp(\frac{1}{2})$$

es decir

$$\lim(1+a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n)-1}} = \exp(\frac{1}{2})$$

***Obs*:** Para poder usar la propiedad (4) y (6) es necesario que $(1+a_n)^{\frac{1}{exp(2a_n)-1}}$ sea positivo, pero como $a_n \to 0$

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}), (\forall n > n_0) \quad (1+a_n) > 0$$

luego

$$(\forall n > n_0) \quad (1+a_n)^{\frac{1}{exp(2a_n)-1}} > 0$$

P5. Las tasas de interés en tres instituciones son 6 % anual, 0,5 % mensual y $100(e^{0,3\alpha} - 1)$ % cada cinco años, respectivamente. Ordene las instituciones de acuerdo a la rentabilidad obtenida en un depósito a cinco años, para los siguientes valores de α: 0, 1 y ln(3). Recuerde que si en un periodo de tiempo la tasa de interés es t % entonces, el capital aumenta en ese periodo en un factor $(1 + t/100)$.

Solución.

Consideremos que la tasa de interés de una institución es t % en un cierto periodo de tiempo. Supongamos que invertimos x unidades monetarias en dicha institución, entonces después de un periodo el capital cambia a:

$$x(1+\frac{t}{100})$$

después del segundo periodo tenemos:

$$x(1+\frac{t}{100})^2$$

así, para el n-esimo periodo tendremos:

$$x(1+\frac{t}{100})^n$$

es decir el capital obtenido después del n-esimo periodo, con una inversión x, es:

$$x(1+\frac{t}{100})^n$$

Ahora calculamos los periodos para cada tipo de depósitos y obtenemos:

Institución	t %	Número de periodos en 5 años	Capital final
1	6	5	$x(1+\frac{6}{100})^5$
2	0.5	60	$x(1+\frac{0,5}{100})^{60}$
3	$100(e^{0,3\alpha} - 1)$	1	$x(1+\frac{100(e^{0,3\alpha}-1)}{100})^1$

Evaluando esto se obtiene:

Institución	**Capital final**
1	$1{,}3382x$
2	$1{,}3488x$
3	$\alpha = 0$ x $\alpha = 1$ $1{,}34986x$ $\alpha = \ln(3)$ $1{,}39038x$

de donde se puede concluir sobre la rentabilidad.

P6 Para la función $f(x) = \ln(1+e^x)$, determine dominio, ceros, crecimiento y signos. Además, determine para que valores de y la ecuación $f(x) = y$ tiene solución. Use esta información para definir la función inversa. Repita el problema para la función $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Solución

Recordemos las siguientes propiedades:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad e^x > 0 \tag{9}$$

$$Dom[\ln(x)] = (0, +\infty) \tag{10}$$

$$e^x, \ln(x) \text{ son estrictamente crecientes} \tag{11}$$

$$\text{Si h escreciente y g es estrictamente creciente entonces h+g es estrictamente creciente} \tag{12}$$

$$\text{Si h y g son est. crecientes entonces goh es est. creciente} \tag{13}$$

- Analicemos $f(x) = \ln(1+e^x)$

Dominio: de (9) se tiene que $1 + e^x > 0$, luego por (10) y (11) $\ln(1+e^x)$ esta definido para todo x, es decir

$$Dom[f(x)] = \mathbb{R}$$

por otro lado de (9) tenemos que

$$1 + e^x > 1$$

aplicando logaritmo por (11)

$$\ln(1+e^x) > \ln(1) = 0$$

luego $f(x) > 0$ y no posee ceros.

Crecimiento: por (11) e^x es est. creciente, luego por (12) $e^x + 1$ también lo es y por (13) $\ln(e^x + 1)$ es est. creciente, es decir $f(x)$ es est. creciente.

¿$f(x) = y$?

$$\ln(1+e^x) = y$$

aplicando exponencial

$$1 + e^x = e^y$$

es decir

$$e^x = e^y - 1$$

si $y > 0$, $e^y - 1 > 0$, luego por (10) podemos aplicar logaritmo para obtener

$$x = \ln(e^y - 1),$$

es decir para $y > 0$, la ecuación $f(x) = y$ posee solución.

Como f es est. creciente, es inyectiva y además $f(x) > 0$, luego si definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, f es biyectiva, podemos entonces, definir la función inversa como:

$$f^{-1}(x) = \ln(e^x - 1)$$

donde $f^{-1}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

- Ahora para $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Dominio: f esta definida para todo x, es decir $Dom[f(x)] = \mathbb{R}$.

Ceros: $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = 0$, luego $Ceros(f) = 0$.

Crecimiento: notemos que x es est. creciente, luego $-x$ es est. decreciente, entonces e^{-x} es est. decreciente, implica $-e^{-x}$ es est. creciente, por lo tanto $f(x)$ es est. creciente. donde hemos usado los teoremas de funciones crecientes.

Signos: $f(x) > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow 2x > 0$, luego $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ y dado que $f(0) = 0$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

¿$f(x) = y$?:

$f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = y \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$, dado que $e^x > 0$ desechamos la solución con signo negativo, por lo tanto

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

y tomando logaritmo

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

Ahora como f es est. creciente es inyectiva y es sobreyectiva (pues para todo y existe un x tal que $f(x) = y$), con esto podemos definir la función inversa de f como:

$$f^{-1}(x) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

donde $f^{-1}(x) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Obs: La función $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ se llama “función seno hiperbólico” y su inversa se denomina “arco seno hiperbólico”.