Soluciones Guía 11

28 de mayo de 2007

Problema 1 Calcule

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

Solución:

Tenemos que $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \\ &= \ln(n+1) \qquad (1)\end{aligned}$$

donde (1) es por la propiedad telescópica y $\ln(1) = 0$. Luego, el límite original se reduce a:

$$\lim \frac{\ln(n+1)}{n}$$

Ahora, $\frac{\ln(n+1)}{n} = \ln\left(\sqrt[n]{n+1}\right)$. Como $\lim \sqrt[n]{n+1} = 1$, concluimos que

$$\lim \ln\left(\sqrt[n]{n+1}\right) = \ln(1) = 0,$$

por la siguiente propiedad:

Proposición 0.1 *Sea $(a_n) \to a > 0$, entonces*

$$\lim \ln(a_n) = \ln(a)$$

DEMOSTRACIÓN: Ver tutoría.

Problema 3 Para $x > 0$, calcule $\lim n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$.

Solución:

Como $x > 0$, entonces $(\exists y \in \mathbb{R})\,,\ \exp(y) = x$. Así, $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\exp(y)} = \exp\left(\frac{y}{n}\right)$ y el límite queda

$$\lim n\left(\exp\left(\frac{y}{n}\right) - 1\right)$$

Esto tiene la forma de la siguiente proposición:

Proposición 0.2 *Sea* $(a_n) \to 0,\ a_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$\lim \frac{\exp\left(a_n\right) - 1}{a_n} = 1$$

Demostración: Ver tutoría.

Naturalmente identificamos a_n con $\frac{y}{n}$, por lo que tendremos que manipular un poco la expresión del límite para formar la proposición,

$$\begin{aligned} n\left(\exp\left(\frac{y}{n}\right) - 1\right) &= \frac{\left(\exp\left(\frac{y}{n}\right) - 1\right)}{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{y\left(\exp\left(\frac{y}{n}\right) - 1\right)}{\frac{y}{n}} \end{aligned}$$

Por álgebra de límites y la proposición 0.2, concluimos que

$$\begin{aligned} \lim n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) &= \lim \frac{y\left(\exp\left(\frac{y}{n}\right) - 1\right)}{\frac{y}{n}} \\ &= y \cdot 1 \\ &= \ln(x) \end{aligned}$$