Algunas Soluciones Semana 10

17 de mayo de 2007

P4. Sea(v_n) con $v_n \in (0,1)$ y $(\frac{1}{nv_n}) \to 0$. Demuestre que $\lim(1-v_n)^n = 0$.

Solución

De la desigualdad de bernoulli

$$(\forall h > -1)\ (1+n)^n \geq 1 + nh$$

tomemos $h = -1 + \frac{1}{1-v_n} > -1$, pues $(v_n) \in (0,1)$ (1) , entonces

$$\frac{1}{(1-v_n)^n} \geq 1 + n(-1 + \frac{1}{1-v_n}) = \frac{1 - v_n + nv_n}{1-v_n}$$

pero por (1) $(1 - v_n + nv_n) \geq nv_n$ y $1 - v_n \geq 0$, luego

$$\frac{1 - v_n + nv_n}{1-v_n} \geq \frac{nv_n}{1-v_n}$$

entonces

$$\frac{1}{(1-v_n)^n} \geq \frac{nv_n}{1-v_n} \geq 0$$

por lo tanto

$$0 \leq (1-v_n)^n \leq \frac{1-v_n}{nv_n} = (1-v_n)\frac{1}{nv_n}$$

por (1) se tiene ademas que la sucesion $(1-v_n)$ es acotada y como la sucesion $\frac{1}{nv_n}$ es nula, usando algebra de límites se concluye que

$$\lim(1-v_n)^n = 0$$

P6. Para $0 \leq a \leq b$ sea $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ e $y_1 = b$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$. Demostrar que ambas sucesiones poseen límite, que $\lim x_n = \lim y_n$ y que si llamamos l a este último limite, se cumple que $\sqrt{ab} \leq l \leq \frac{a+b}{2}$.

Solución

i) Demostremos que ambas sucesiones poseen límite, para ello probemos que x_n e y_n son monótonas y acotadas.

1º. Notemos que

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} = \frac{(\sqrt{x_n})^2 + (\sqrt{y_n})^2}{2} = \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n})^2 + 2\sqrt{x_n y_n}}{2} = \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n})^2}{2} + x_{n+1}$$

de donde

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n})^2}{2} \geq 0$$

entonces

$$y_{n+1} \geq x_{n+1} \tag{1}$$

usando esto $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leq \frac{y_n + y_n}{2} = y_n$ por lo tanto

$$y_{n+1} \leq y_n \tag{2}$$

es decir la sucesión y_n es decreciente , y por lo tanto $y_n \leq y_1 = b \ \forall n \in \mathbb{N}$

2º. usando (1) se deduce que

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} = \sqrt{x_n}\sqrt{y_n} \geq \sqrt{x_n}\sqrt{x_n} = x_n$$

entonces

$$x_{n+1} \geq x_n \tag{3}$$

es decir la sucesión x_n es creciente, y por lo tanto $a = x_1 \leq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Usando todo lo anterior obtenemos:

$$a \leq x_n \leq y_n \leq b$$

es decir x_ne y_n son acotadas, usando el teorema de las sucesiones monótonas se deduce que x_ne $y_n$poseen límite.

ii) Probemos que $\lim x_n = \lim y_n$

De la definición de y_{n+1}:

$$2y_{n+1} = x_n + y_n$$

tomando lím a esta igualdad y utilizando álgebra de limites se tiene que

$$2 \lim y_{n+1} = \lim x_n + \lim y_n$$

pero $\lim y_{n+1} = \lim y_n$ (ver guia de problemas semana 9) luego

$$\lim x_n = \lim y_n$$

iii) Usando (1) ,(2) y (3) simultaneamente tenemos que para $n \geq 2$

$$x_2 \leq x_n \leq y_n \leq y_2$$

tomando límite a esta expresión y llamando $l = \lim x_n = \lim y_n$ se obtiene:

$$\sqrt{ab} = x_2 \leq l \leq y_2 = \frac{a+b}{2}$$