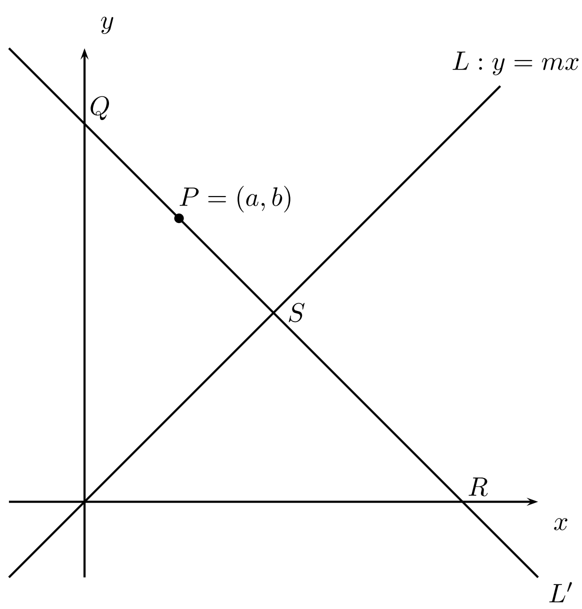
Semana 3

P1. Dado el punto P de coordenadas (a, b) y la recta L de ecuación $y = mx$, determinar la ecuación de la recta que pasa por P y tal que el trazo que queda determinado por la intersección de ella con los ejes, queda dimidiado por L.
Solución



Sea $m_{L'}$ la pendiente de L', como $(a, b) \in L'$, se tiene que

$$(y - b) = m_{L'}(x - a)$$

Calculemos ahora las coordenadas de Q y de R.
(i)

$$x = 0 \quad y = b - m_{L'}a \quad Q = (0, b - m_{L'}a)$$

(ii)

$$y = 0 \quad x = a - \tfrac{b}{m_{L'}} \quad R = (a - \tfrac{b}{m_{L'}}, 0)$$

Calculemos S:
S esta sobre L y L', luego debe satisfacer:

$$y = mx$$
$$(y-b) = m_{L'}(x-a)$$

Resolviendo este sistema se encuentra que

$$S = (\frac{b - m_{L'}a}{m - m_{L'}}, m\frac{b - m_{L'}a}{m - m_{L'}})$$

Ahora si L dimidia a QR, necesariamente S será el punto medio de QR. entonces

$$\frac{Q+R}{2} = S$$

luego

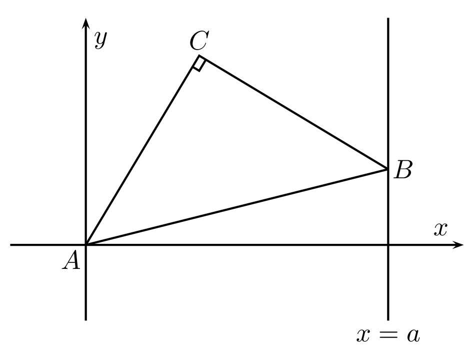
$$(0, b - m_{L'}a) + (a - \frac{b}{m_{L'}}, 0) = 2(\frac{b - m_{L'}a}{m - m_{L'}}, m\frac{b - m_{L'}a}{m - m_{L'}})$$

igualando coordenadas se obtiene que $m_{L'} = -m$ y así finalmente

$$L' \colon (y-b) = -m(x-a).$$

P2. Un triángulo ABC isósceles ($AC = BC$) y rectángulo en C, varía de tal manera que su vértice A permanece fijo en el origen del sistema de coordenadas y su vértice B se mueve sobre la recta de ecuación $x = a$. Determinar la ecuación del lugar geométrico que recorre el punto C y reconocer la figura que describe.

Solución



Consideremos los puntos $A = (0,0)$, $B = (a, y_b)$, $C = (x_c, y_c)$. Como el triángulo es isósceles se tiene que $AC = BC$, luego

$$(x_c - 0)^2 + (y_c - 0)^2 = (x_c - a)^2 + (y_c - y_b)^2. \tag{1}$$

Por otro lado $AC \perp BC$, entonces si m_{AC} y m_{BC} son las pendientes de las rectas que pasan por AC y BC respectivamente, debe tenerse que

$$m_{AC} \cdot m_{BC} = -1.$$

y

$$m_{AC} = \frac{y_c - 0}{x_c - 0} = \frac{y_c}{x_c}$$
$$m_{BC} = \frac{y_c - y_b}{x_c - a}$$

por lo tanto

$$\frac{y_c(y_c - y_b)}{x_c(x_c - a)} = -1 \tag{2}$$

elevando (2) al cuadrado y reemplazando en (1) se obtiene

$$x_c^2 + y_c^2 = (x_c - a)^2 + \frac{x_c^2}{y_c^2}(x_c - a)^2$$
$$y_c^2 = (x_c - a)^2$$

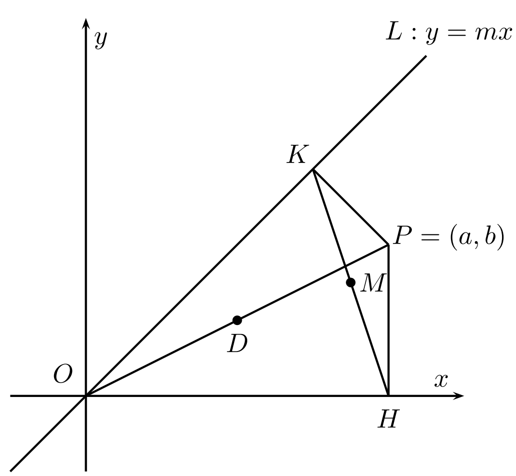
y así

$$y_c = (x_c - a)$$
$$y_c = -(x_c - a)$$

es decir el lugar geométrico que recorre el punto C, son dos rectas perpendiculares.

P3. Dados el punto $P = (a, b)$ y la recta $L : y = mx$, se trazan PH perpendicular a OX y PK perpendicular a L. Si D es el punto medio de OP y M es el punto medio de HK
Probar que DM es perpendicular a HK y $DK = DH$.

Solución



Sea $K = (x_0, my_0)$, por hipótesis tenemos que:

$$P = (a, b) \quad D = (\tfrac{a}{2}, \tfrac{b}{2}) \quad M = (\tfrac{a+x_0}{2}, \tfrac{mx_0}{2})$$

Probemos que $DM \perp HK$:

$$m_{PK} = \frac{mx_0 - b}{x_0 - a}$$

como $PK \perp L$ se tiene que

$$\frac{m \cdot (mx_0 - b)}{x_0 - a} = -1 \tag{3}$$

por otro lado

$$m_{HK} = \frac{mx_0}{x_0 - a}$$

y

$$m_{PM} = \frac{\frac{mx_0}{2} - \frac{b}{2}}{\frac{a+x_0}{2} - \frac{a}{2}} = \frac{mx_0 - a}{x_0}$$

entonces

$$\begin{aligned} m_{HK} \cdot m_{DM} &= \frac{mx_0 - b}{x_0} \cdot \frac{mx_0}{x_0 - a} \\ &= \frac{m(mx_0 - b)}{x_0} \\ &= -1 && \text{por (3)} \end{aligned}$$

por lo tanto $HK \perp DM$.
Probemos ahora que $DM = DH$:

$$\begin{aligned} d_{DH}^2 &= (\frac{a}{2} - a)^2 + (\frac{b}{2} - 0)^2 \\ &= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \end{aligned}$$

y

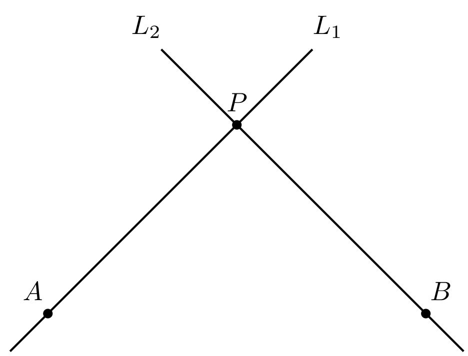
$$\begin{aligned} d_{DK}^2 &= (\frac{a}{2} - x_0)^2 + (\frac{b}{2} - mx_0)^2 \\ &= \frac{a^2}{4} - ax_0 + x_0^2 + \frac{b^2}{4} - bmx_0 + m^2x_0^2 \\ &= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + x_0^2 - ax_0 - bmx_0 + m^2x_0^2 \end{aligned}$$

pero por (3) $m(mx_0 - b) = -x_0 + a$, entonces

$$\begin{aligned} d_{DK}^2 &= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + x_0(x_0 - a) + x_0 m(mx_0 - b) \\ &= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + x_0 \underbrace{(m(mx_0 - b) + x_0 - a)}_{=0} \\ &= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \\ &= d_{DH}^2 \end{aligned}$$

por lo tanto $DK = DH$.

P4. Dos rectas variables L_1 y L_2 que pasan, respectivamente por dos puntos fijos A y B se cortan perpendicularmente en el punto P. Determinar el lugar geométrico de P.
Solución



Sean $A = (a, b)$, $B = (c, d)$, luego

$$L_1 : y - b = m_1(x - a) \qquad\qquad L_2 : y - d = m_2(x - c)$$

(i) si $x = a$, entonces $P = (a, b)$.
(ii) si $x = c$, entonces $P = (c, d)$.

(iii) si $x \neq a$ y $x \neq c$;

$$m_1 = \frac{y - b}{x - a} \qquad\qquad m_2 = \frac{y - d}{x - c}$$

como $L_1 \perp L_2$ se cumple que $m_1 \cdot m_2 = -1$, es decir

$$\frac{(y - b)(y - d)}{(x - a)(x - c)} = -1 \tag{4}$$

desarrollando esta ecuación se obtiene

$$(y - \frac{(b+d)}{2})^2 + (x - \frac{(a+c)}{2})^2 = (b-d)^2 + (a-c)^2.$$

que corresponde a una circunferencia de centro

$$C = (\frac{b+d}{2}, \frac{a+c}{2})$$

y radio

$$r = \sqrt{(b-d)^2 + (a-c)^2}$$

Observación: Notar que C es el punto medio entre A y B, y $r = d_{AB}$.