

Pauta Control 6, MA1001 Introducción al Cálculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2007/1 (2 de Junio)

P1) i) a) $\lim \left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^n \sin^2 n + \frac{1}{n} \cos(n!) \right\} = 0$ ya que $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ y $\frac{1}{n}$ tienden a cero y $\sin^2 n$ y $\cos(n!)$ son acotadas. 1 pto.

b) $\lim \sqrt[n]{n^3 + n^2 + n} = 1$ ya que

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n^3 + n^2 + n} \leq \sqrt[n]{3} (\sqrt[n]{n})^3$$
y los límites de los extremos son iguales a 1. 1 pto.

c) $\lim \frac{2^{n+1} + 1}{2^n - n} = \lim \frac{2 + (\frac{1}{2})^n}{1 - n(\frac{1}{2})^n} = \frac{2+0}{1-0} = 2$ 1 pto.

d) $\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e^{-1}} = e$ 1 pto.

ii) (2 ptos.) Como $f(x) = \ln \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$, se tiene que:

$$\lim f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim \ln \left(\frac{1+(\frac{1}{n})^2}{1-(\frac{1}{n})^2}\right) = \ln \left(\frac{1+0}{1-0}\right) = 0$$

..... 1 pto.

Además

$$\lim n^2 f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim n^2 \ln \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right) = \lim n^2 \ln \left(1 + \frac{2}{n^2-1}\right).$$

Para concluir, recordamos que $\lim \frac{\ln(1+s_n)}{s_n} = 1$ cuando $s_n \rightarrow 0$. Por lo tanto:

$$\lim n^2 f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim n^2 \cdot \frac{2}{n^2-1} \cdot \frac{\ln \left(1 + \frac{2}{n^2-1}\right)}{\frac{2}{n^2-1}} = 2 \cdot 1 = 2.$$

..... 1 pto.

P2) Dado el parámetro $a \in [\frac{1}{2}, 1]$, se define la sucesión (s_n) mediante la recurrencia:

$$s_1 = 0, \quad s_{n+1} = f(s_n)$$

donde la función f está definida por $f(x) = a - \frac{(1-x)^2}{2}$.

a) Si $x \in [0, \sqrt{2a-1}]$ entonces:

$$\begin{aligned} & 0 \leq 1 - \sqrt{2a-1} \leq 1 - x \leq 1 \\ \Rightarrow & (1 - \sqrt{2a-1})^2 = 2a - 2\sqrt{2a-1} \leq (1-x)^2 \leq 1 \\ \Rightarrow & a - \sqrt{2a-1} \leq \frac{(1-x)^2}{2} \leq \frac{1}{2} \\ \Rightarrow & a - \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2a-1}. \end{aligned}$$

..... 1 pto.

Probemos ahora por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple que $s_n \in [0, \sqrt{2a-1}]$.

En efecto, para $n = 1$ se tiene que $s_1 = 0 \in [0, \sqrt{2a-1}]$ 1 pto.

Supongamos que $s_n \in [0, \sqrt{2a-1}]$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Con esto, usando la propiedad ya probada se tiene que

$$s_{n+1} = f(s_n) \in [a - \frac{1}{2}, \sqrt{2a-1}] \subseteq [0, \sqrt{2a-1}].$$

..... 1 pto.

b) Usando la sugerencia, estudie el signo de $s_n - s_{n+1} = s_n - f(s_n)$.
Se tiene que

$$\begin{aligned} s_n - s_{n+1} &= s_n - a + \frac{(1-s_n)^2}{2} \\ &= \frac{s_n^2 - (2a-1)}{2} \leq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto la sucesión es creciente. 1 pto.

Como ya sabíamos de la primera parte que era acotada, esto implica que la sucesión es convergente. 1 pto.

Sea ℓ el límite de la sucesión. Ya sabemos que $\ell \in [0, \sqrt{2a-1}]$.

Tomando límite en la expresión que obtuvimos para $s_n - s_{n+1}$ se tiene que

$$0 = \frac{\ell^2 - (2a-1)}{2},$$

por lo tanto $\ell = \sqrt{2a-1}$ 1 pto.