Control 5, MA1001 Introducción al Cálculo
Departamento de Ingeniería Matemática, FCFM, U. de Chile
Semestre 2008/1 (31 de Mayo)

P.1) Calcule, si es que existen, los límites de las siguientes sucesiones, justificando sus respuestas

a) (*1.5 ptos.*) $a_n = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}$

Solución

$$\lim \frac{1+\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}} = \lim \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{0+0}{1+0} = 0$$

.... 1.5 ptos.

b) (*1.5 ptos.*) $b_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+2}$

Solución

$$\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+2} = \lim \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sqrt{n+2} = \lim \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

.... 0.8 ptos.

$$= \lim \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

.... 0.7 ptos.

c) (*1.5 ptos.*) $c_n = \left(1+\frac{2}{n^2}\right)^n$

Solución

La sucesión es de la forma $(1+h_n)^n$ donde $h_n = \frac{2}{n^2} \to 0$ y además $n \cdot h_n = \frac{2}{n} \to 0$ ..... 1.0 ptos.

Por lo tanto, por teorema conocido,

$$\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^n \to 1$$

.... 0.5 ptos.

d) (*1.5 ptos.*) $d_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

Solución

Acotando se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1$$

.... 0.5 ptos.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

.... 0.5 ptos.

Luego, usando et teorema del Sandwich de sucesiones se concluye que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \to 1$$

.... 0.5 ptos.

P.2) Considere las sucesiones (X_n) e (Y_n) definidas por

$$X_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad\qquad Y_n = X_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

a) (*3 ptos.*) Pruebe que (X_n) e (Y_n) son sucesiones monótonas.

(*Sugerencia: calcule $X_{n+1} - X_n$ y posteriormente $Y_{n+1} - Y_n$*)

Solución

La sucesión (X_n) es estrictamente creciente ya que:

$$X_{n+1} - X_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

.... 1.5 ptos.

Para estudiar la sucesión (Y_n), calculamos $Y_{n+1} - Y_n$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} - Y_n &= X_{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - X_n - \frac{1}{n \cdot n!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\
&= \frac{(n+1)n + n - (n+1)^2}{(n+1)!(n+1)n} \\
&= \frac{-1}{(n+1)!(n+1)n} \\
&< 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto (Y_n) es estrictamente decreciente. .... 1.5 ptos.

b) (*3 ptos.*) Usando lo anterior, demuestre que ambas sucesiones convergen, que lo hacen al mismo límite ℓ, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad X_n < \ell < Y_n$$

y que

$$2{,}5 < \ell < 2{,}75$$

Solución

Como se tiene que $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n < Y_n$ y las sucesiones son monótonas, se deduce que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad X_1 = 2 \leq X_n < Y_n \leq Y_1 = 3$$

. . . . 0.5 ptos.

Con esto, ambas sucesiones son acotadas y como eran monótonas, convergen a ℓ_1 y ℓ_2 respectivamente. . . . . 0.5 ptos.

Como $Y_n = X_n + \frac{1}{n \cdot n!}$, tomando límite se deduce $\ell_2 = \ell_1 + 0$. Por lo tanto ambos límites son iguales. Llamémoslo ℓ . . . . 1.0 ptos.

Por monotonía se tiene que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad X_1 = 2 \leq X_n < \ell < Y_n \leq Y_1 = 3$$

. . . . 0.5 ptos.

evaluando en $n = 2$ la expresión anterior da

$$X_2 = 2,5 < \ell < Y_2 = 2,5 + \frac{1}{2 \cdot 2!} = 2,75$$

. . . . 0.5 ptos.