Control 7, MA1001 Introducción al Cálculo
Departamento de Ingeniería Matemática, FCFM, U. de Chile
Semestre 2008/1 (28 de Junio)

P.1) Calcule sin usar L'Hôpital, si es que existen, los siguientes límites, justificando sus respuestas:

a) (*1.5 ptos.*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} \cdot \dfrac{x^2}{e^{x^2}-1}$.

Solución

Usamos el cambio de variables $u = x^2 \to 0$ y queda

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{e^{x^2}-1} = \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} \cdot \frac{u}{e^u-1} = 1 \cdot 1 = 1$$

.... 1.5 ptos.

b) (*1.5 ptos.*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}$.

Solución

Ya que $\cos\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ Tenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \frac{\frac{\pi}{2}x}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \frac{2}{\pi} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

.... 1.5 ptos.

c) (*1.5 ptos.*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

Solución

Como $\cos x \to 1$, hecemos es ajuste siguiente

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} = 1 \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$$

.... 1.5 ptos.

d) (*1.5 ptos.*) $\lim_{x\to 0} \left[\dfrac{2}{1+x^2}\right]$.

(*Obs: aquí el paréntesis denota la función parte entera*)

Solución

Sabemos que en $(-1,0)\cup(0,1)$ se tiene que

$$1 < \frac{2}{1+x^2} < 2$$

por lo tanto,

$$\left[\frac{2}{1+x^2}\right] = 1 \qquad \forall x \in (-1,0)\cup(0,1).$$

Esto implica que el límite es 1. .... 1.5 ptos.

P.2) a) (*2 ptos.*) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

a.1) $x \operatorname{sen} x$ **a.2)** $\ln(\operatorname{arc\,sen} x)$

Solución

a.1) $\left(x \operatorname{sen} x\right)' = \operatorname{sen} x + x\cos x$ .... 1.0 pto.

a.2) $\left(\ln(\operatorname{arc\,sen} x)\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{arc\,sen} x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .... 1.0 pto.

b) (*2 ptos.*)

Escriba la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación

$$x^3y^3 + xy = 2,$$

en su punto $P(x_0,y_0)$ del primer cuadrante.

Demuestre que esa recta corta a los ejes coordenados en puntos A y B de modo que P es punto medio del trazo AB.

Solución

Derivando en forma implícita tenemos que

$$3x^2y^3 + x^3 3y^2 y' + y + xy' = 0$$

es decir

$$(3x^2y^2+1)y + (x^2 3y^2+1)xy' = 0.$$

Simplificando, se obtiene que en el primer cuadrante $y' = -\frac{y_0}{x_0}$ .... 1.0 pto.

Por lo tanto la recta tangente en P tiene la ecuación $y = 2y_0 - \frac{y_0}{x_0}x$ .... 0.5 pto.

Esta recta corta a los ejes coordenados en los puntos $A = (2x_0,0)$ y $B = (0,2y_0)$. Claramente $P = \frac{A+B}{2}$. .... 0.5 pto.

c) (*2 ptos.*) Una partícula se mueve por el eje OX de modo que su posición está dada por la fórmula:

$$x(t) = \frac{1}{1 + a\, e^{-kt}}$$

donde a y k son constantes positivas.

Determine la velocidad de la partícula en función de t.

Solución

La velocidad (rapidez) está dada por la derivada de la posición. Luego

$$v(t) = \left(\frac{1}{1 + a\, e^{-kt}} \right)' = -\frac{1}{(1 + a\, e^{-kt})^2} \cdot a e^{-kt} \cdot (-k)$$

.... 2.0 pto.