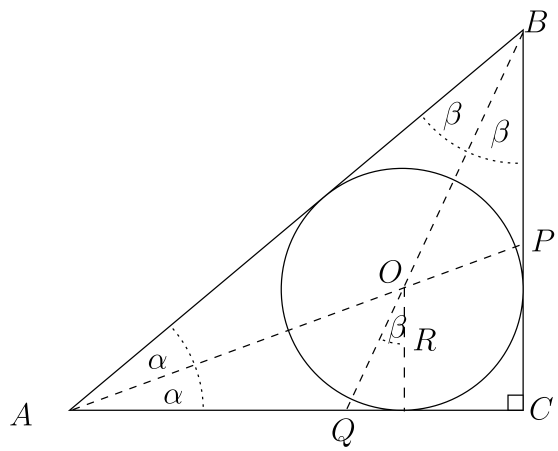
Control 4, MA1001 Introducción al Cálculo
Departamento de Ingeniería Matemática, FCFM, U. de Chile
Semestre 2008/1 (10 de Mayo)

P.1) El triángulo ABC de la figura es rectángulo en C y tiene su círculo inscrito de radio R, centrado en O.

Las bisectrices por los vértices A y B que pasan por O, cortan a los lados BC y AC en los puntos P y Q respectivamente.



Se desea demostrar que:

$$\frac{1}{\overline{AQ}} + \frac{1}{\overline{BP}} = \frac{1}{R}$$

para ello, usando los ángulos auxiliares α y β de la figura, se pide realizar lo siguiente:

a) (*1.0 ptos.*) Encuentre una expresión para $\overline{AO}$ en términos de R y el ángulo α.

Solución

Claramente $R = \overline{AO} \operatorname{sen} \alpha$, por lo tanto $\overline{AO} = \frac{R}{\operatorname{sen} \alpha}$ .... 1.0 ptos.

b) (*2.0 ptos.*) Encuentre una expresión para $\overline{AQ}$ en términos de $\overline{AO}$, α y β.

Solución

Usando el teorema del seno en el triángulo AOQ de ángulos α, $\frac{\pi}{2} + \beta$ y $\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$ se tiene que: .... 1.0 ptos.

$$\frac{\overline{AQ}}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta))} = \frac{\overline{AO}}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + \beta)}$$

.... 1.0 ptos.

Es decir:

$$\overline{AQ} = \overline{AO} \cdot \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$$

c) (*1.0 ptos.*) Usando las partes anteriores, calcule $\dfrac{1}{\overline{AQ}}$ en términos de R, α y β.

Solución

Juntando los resultados anteriores se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\overline{AQ}} &= \frac{1}{\overline{AO}} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{1}{R} \cdot \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}\end{aligned}$$

.... 1.0 ptos.

d) (*2.0 ptos.*) Siga el procedimiento análogo para encontrar $\dfrac{1}{\overline{BP}}$ en términos de R, α y β y deducir la propiedad buscada.

Solución

La fracción $\dfrac{1}{\overline{BP}}$ se obtiene del cálculo anterior, intercambiando los roles de α y β, luego:

$$\frac{1}{\overline{BP}} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$$

.... 1.0 ptos.

Sumando ambas expresiones tenemos

$$\frac{1}{\overline{AQ}} + \frac{1}{\overline{BP}} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\tan(\alpha+\beta)}{R}$$

.... 0.5 ptos.

Finalmente, como en el triángulo ABC se tiene que $2\alpha + 2\beta + \frac{\pi}{2} = \pi$, se deduce que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ y luego $\tan(\alpha+\beta) = 1$. Con esto se concluye. .... 0.5 ptos.

P.2) a) Considere el conjunto $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}^* \cup \{0\} \right\}$.

a.1) (*1.5 ptos.*) Encuentre, si es que existen, todas las cotas inferiores de A, $\min(A)$ y $\sup(A)$. Justifique sus resultados.

Solución

Claramente se tiene que $\forall n \in \mathbb{N}\ n \geq 0$, luego $\forall n \in \mathbb{N}\ \frac{n}{n+1} \geq 0$. Es decir, 0 es cota inferior de A. .... 0.3 ptos.

Además, para $n = 0$ la fracción $\frac{n}{n+1}$ vale 0. Es decir $0 \in A$ .... 0.3 ptos.

Con esto: $0 = \min A$ .... 0.4 ptos.

Esto implica que $0 = \inf A$ y además, las cotas inferiores de A son todos los reales en $(-\infty, 0]$. .... 0.5 ptos.

a.2) (*1.5 ptos.*) Demuestre, usando la propiedad arquimediana en forma apropiada, que $\sup(A) = 1$.

Solución

Claramente se tiene que $\forall n \in \mathbb{N}\ n \leq n + 1$, luego $\forall n \in \mathbb{N}\ \frac{n}{n+1} \leq 1$. Es decir, 1 es cota superior de A. .... 0.3 ptos.

Para probar que 1 es el supremo de A debemos probar que los números inferiores a 1 no son cota superior. .... 0.2 ptos.

Es decir: P.D.Q: $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}\ \frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon$ .... 0.3 ptos.

Sin embargo, la expresión $\frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon$ es equivalente a $\varepsilon \cdot (n + 1) > 1$.
Luego lo que debemos demostrar es: P.D.Q: $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}\ \varepsilon \cdot (n + 1) > 1$ .... 0.2 ptos.

Usando la propiedad arquimediana sabemos que $\forall \varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon \cdot n_0 > 1$. 0.3 ptos.

Por lo tanto, tomando dicho n_0 se tiene que $\varepsilon \cdot (n_0 + 1) > \varepsilon \cdot n_0 > 1$, con lo cual la propiedad que queríamos demostrar es cierta para $n = n_0$. .... 0.2 ptos.

b) (*3.0 ptos.*) Considere dos conjuntos $V, W \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos tales que:

$$\forall x \in V,\ \forall y \in W \quad x + y < 0.$$

Demuestre que ambos conjuntos son acotados superiormente y que además

$$\sup(V) + \sup(W) \leq 0.$$

Solución

Usando el dato del problema se tiene que:

$$\forall x \in V \left\{ \forall y \in W \quad y < -x \right\}.$$

La expresión entre llaves (o sea $\{\forall y \in W \quad y < -x\}$) implica que el real $-x$ es cota superior del conjunto W. .... 0.5 ptos.

Por lo tanto, W es acotado superiormente, ... 0.5 ptos.

en virtud del axioma del supremo W tiene supremo .... 0.5 ptos.

y la cota $-x$ debe ser mayor o igual a dicho supremo.

Por lo tanto

$$\forall x \in V \quad -x \geq \sup(W)$$

.... 0.5 ptos.

Esto último se puede reescribir como

$$\forall x \in V \ x \leq -\sup(W)$$

.... 0.2 ptos.

Esta expresión implica que el real $-\sup(W)$ es cota superior del conjunto V. .... 0.2 ptos.

Por lo tanto, V es acotado superiormente, ... 0.2 ptos.

en virtud del axioma del supremo V tiene supremo .... 0.2 ptos.

y la cota $-\sup(W)$ debe ser mayor o igual a dicho supremo.

Por lo tanto

$$-\sup(W) \geq \sup(V)$$

.... 0.2 ptos.

que corresponde, salvo despeje elemental, a la desigualdad pedida.