Control 6, MA1001 Introducción al Cálculo
Departamento de Ingeniería Matemática, FCFM, U. de Chile
Semestre 2008/1 (14 de Junio)

P.1) Calcule, si es que existen, los siguientes límites, justificando sus respuestas:

a) (*1.5 ptos.*) $\lim \dfrac{a_n \ln a_n}{a_n^2 - 1}$, donde $a_n \to 1^+$

Solución

Reordenando se tiene que

$$\lim \frac{a_n \ln a_n}{a_n^2 - 1} = \lim \frac{a_n}{a_n + 1} \cdot \frac{\ln a_n}{a_n - 1}$$

.... 0.5 ptos.

Como $a_n \to 1^+$ entonces $\frac{\ln a_n}{a_n - 1} \to 1$ .... 0.5 ptos.

Como además $\frac{a_n}{a_n+1} \to \frac{1}{2}$ se tiene que el límite es $\frac{1}{2}$ .... 0.5 ptos.

b) (*1.5 ptos.*) $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} u}{u}$

Solución

Como $\operatorname{sen} u \in [-1, 1]$ tenemos que

$$-\frac{1}{u} \leq \frac{\operatorname{sen} u}{u} \leq \frac{1}{u}$$

.... 0.7 ptos.

Sabiendo que $\frac{1}{u} \to 0$ y usando sandwich se obtiene que el límite pedido es cero. .... 0.8 ptos.

c) (*1.5 ptos.*) $\lim\limits_{u \to -\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{u}}{u + \frac{1}{u}}$

Solución

Reordenando se tiene que

$$\lim_{u \to -\infty} \frac{1 + \frac{1}{u}}{u + \frac{1}{u}} = \lim_{u \to -\infty} \frac{\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}}{1 + \frac{1}{u^2}}$$

.... 0.8 ptos.

Como $\frac{1}{u} \to 0$, usando álgebra de límites, se obtiene que el límite es cero. .... 0.7 ptos.

d) (*1.5 ptos.*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$

Obs: Aquí debe usar la definición de límites laterales, en términos de una variable $u \to +\infty$.

Solución

Estudiemos el límite lateral por la derecha:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{u\to+\infty} \frac{|1/u|}{1/u} = \lim_{u\to+\infty} 1 = 1.$$

.... 0.5 ptos.

Estudiemos el límite lateral por la izquierda:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{u\to+\infty} \frac{|-1/u|}{-1/u} = \lim_{u\to+\infty} -1 = -1.$$

.... 0.5 ptos.

Como ambos límites son distintos, el límite no existe. .... 0.5 ptos.

P.2) a) (*2 ptos.*) Demuestre, usando la definición ε-m (aquella que dice: $\forall\varepsilon > 0,\ \exists m > 0\ldots$), que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Solución

Debemos demostrar que

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists m > 0,\ \forall x \geq m \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \varepsilon.$$

.... 0.5 ptos.

Pero, para $x > 0$, la desigualdad $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \varepsilon$ es equivalente a $x \geq \frac{1}{\varepsilon^2}$ .... 0.5 ptos.

Por lo tanto, para $\varepsilon > 0$ arbitrario, tomando $m = \frac{1}{\varepsilon^2}$ se tiene que $\forall x \geq m$ se cumple $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \varepsilon$. .... 1.0 ptos.

b) (*2 ptos.*) Usando (a), sandwich y álgebra de límites, calcule $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\sqrt{x}$ y $\lim_{x\to+\infty} \left(e^{-x}\sqrt{x}\right)^2$.

Solución

Usando la desigualdad de la exponencial se tiene que

$$0 \leq e^{-x} \leq \frac{1}{1+x} \qquad \forall x > -1$$

.... 0.5 ptos.

Por lo tanto, multiplicando por $\sqrt{x}$ resulta

$$0 \leq e^{-x}\sqrt{x} \leq \frac{\sqrt{x}}{1+x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}+1}$$

.... 0.5 ptos.

Usando esta desigualdad y sandwich, se deduce que $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\sqrt{x} = 0$ .... 0.5 ptos.

El segundo límite es cero ya que es el primero al cuadrado. .... 0.5 ptos.

c) (*2 ptos.*) Use el teorema de la composición (cambio de variables) adecuadamente, para calcular los siguientes límites, a partir de los calculados en (b), y sabiendo que $\lim_{u\to+\infty} \ln(u) = +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\cdot x \qquad \text{y} \qquad \lim_{u\to+\infty} u^{-1}\cdot \ln u$$

Solución

El último límite calculado en (b) es $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}\cdot x = 0$.

El primer límite pedido se puede escribir como

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\cdot x = \lim_{x\to+\infty} 2e^{-2\frac{x}{2}}\cdot \frac{x}{2}$$

.... 0.5 ptos.

Por lo tanto usando el cámbio de variable $u = \frac{x}{2}$ este límite es el doble del calculado en (b), es decir es cero. .... 0.5 ptos.

El segundo límite pedido se puede escribir como

$$\lim_{u\to+\infty} u^{-1}\cdot \ln u = \lim_{u\to+\infty} \exp(-1\ln u)\cdot \ln u$$

.... 0.5 ptos.

Por lo tanto, haciendo el cambio de variable $z = \ln u \to +\infty$ se concluye que el límite anterior es igual a

$$= \lim_{z\to+\infty} \exp(-z)\cdot z$$

.... 0.5 ptos.

El cual ya habíamos calculado y era cero.