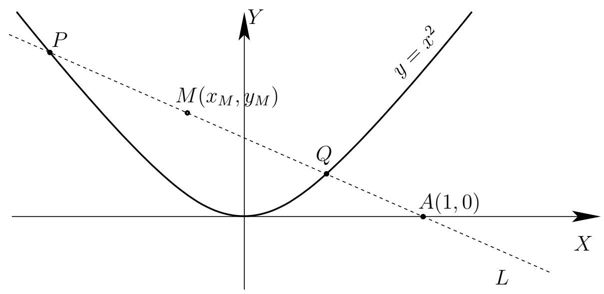
Control 2, MA1001 Introducción al Cálculo
Departamento de Ingeniería Matemática, FCFM, U. de Chile
Semestre 2008/1 (12 de Abril)

Instrucciones: Este control tiene 2 partes con diferente puntaje (indicado en paréntesis). La nota N del control se calcula con la fórmula $N = P + 1$, donde P es el puntaje obtenido.

Pte. a) Considere la parábola de ecuación $y = x^2$ y el punto A de coordenadas $(1, 0)$.

Si por el punto A se traza una recta L de pendiente variable $m \in \mathbb{R}$, se pide lo siguiente:



1°) (*1.5 ptos.*) Determine el conjunto C de todos los m, tales que la recta L y la parábola se intersecten en al menos un punto.

2°) (*1.0 pto.*) Si $m \in C$, sean P y Q los puntos donde la recta y la parábola se intersectan y M el punto medio del trazo PQ (ver figura). Determine las coordenadas (x_M, y_M) de M en términos de m.

3°) (*1.0 pto.*) De las ecuaciones anteriores (eliminando el parámetro m), encuentre en qué curva se mueve el punto M (indique la ecuación e identifíquela). Además, considerando que $C \neq \mathbb{R}$, determine cual zona de esta curva es realmente recorrida por M.

Solución

1°) La recta L tiene por ecuación $y = m(x - 1)$. .... 0.4 ptos.

Al intersectar la parábola $y = x^2$ con la recta L se obtiene la cuadrática $x^2 - mx - m = 0$.
.... 0.4 ptos.

Esta cuadrática posee al menos una solución ssi $\Delta = m^2 - 4m \geq 0$ .... 0.4 ptos.

Esto último ocurre ssi $m \in C = (-\infty, 0] \cup [4, \infty)$ .... 0.3 ptos.

2°) Si $m \in C$ la cuadrática anterior tiene las soluciones x_P y x_Q, de modo que $x_M = \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{m}{2}$ .... 0.7 ptos.

Usando la ecuación de la recta, se deduce que $y_M = m(x_M - 1) = m(\frac{m}{2} - 1)$ .... 0.3 ptos.

3°) m se elimina considerando que $m = 2x_M$ y por lo tanto se obtiene que $y_M = 2x_M(x_M - 1)$. Es decir el punto M recorre una parábola .... 0.4 ptos.

Esta parábola tiene vértice en $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, foco en $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{8})$ y directriz $y = -\frac{5}{8}$ $(p = \frac{1}{8})$. ..... 0.3 ptos.

Considerando que $m \in C$ se tiene que $x_M \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$. Es decir, el punto M recorre los puntos de la parábola $y = 2x^2 - 2x$ que cumplen $x \leq 0$ o $x \geq 2$. .... 0.3 ptos.

Pte. b) *(2.5 ptos.)*

Considere una barra AB de largo ℓ y sea M su punto medio (ver Fig. 1). Si la barra se ubica en el sistema de coordenadas de modo que el punto A se mueva sobre el eje OY y el punto M se mueva sobre el eje OX (ver Fig. 2) ¿Cual es el Lugar Geométrico descrito por el extremo B? Identifíquelo completamente.

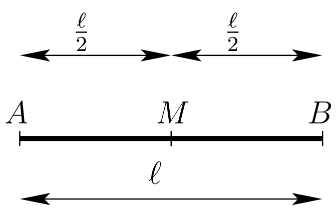


Fig. 1: Barra AB de largo ℓ

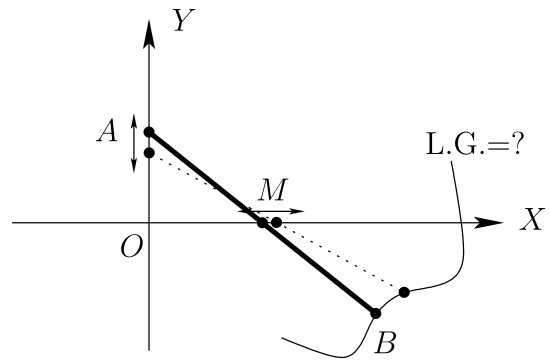


Fig. 2: La barra sobre el sistema de coordenadas

Solución

Método 1:

Sea $B(\alpha, \beta)$ un punto del lugar geométrico. El punto A se encuentra a una distancia ℓ de B, por lo tanto satisface la ecuación

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \ell^2$$

.... 0.4 ptos.

Como admás pertenece al eje OY satisface $x = 0$. Es decir se obtiene que

$$A(0, \beta \pm \sqrt{\ell^2 - \alpha^2})$$

.... 0.4 ptos.

Usando esto y las coordenadas (α, β) de B, se concluye que el punto medio del trazo AB tiene coordenadas

$$M(\frac{\alpha}{2}, \beta \pm \frac{1}{2}\sqrt{\ell^2 - \alpha^2})$$

.... 0.3 ptos.

Como este punto debe pertenecer al eje OX se debe cumplir que

$$\beta = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\ell^2 - \alpha^2}$$

.... 0.4 ptos.

Es decir, reordenando se tiene que

$$\frac{\alpha^2}{\ell^2} + \frac{\beta^2}{(\ell/2)^2} = 1$$

.... 0.3 ptos.

Con esto se tiene que el Lugar Geométrico es una elipse de semieje mayor ℓ y semieje menor $\ell/2$ centrada en el origen. .... 0.4 ptos.

Su excentricidad es $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, foco en $F(\frac{\sqrt{3}\ell}{2}, 0)$ y directriz $x = \frac{2\sqrt{3}\ell}{3}$. .... 0.3 ptos.

Solución

Método 2

Sean $(0, a)$ y $(m, 0)$ las coordenadas de los puntos A y M respectivamente, donde a y m son **parámetros desconocidos a priori**. .... 0.3 ptos.

Como la distancia entre A y M es $\ell/2$ se debe cumplir que

$$a^2 + m^2 = (\ell/2)^2 \tag{0.1}$$

.... 0.4 ptos.

Como M era punto medio del trazo AB se obtiene que las coordenadas del extremo B son:

$$x_B = 2m, \qquad y_B = -a$$

.... 0.4 ptos.

Para eliminar los parámetros a y m, despejamos

$$m = \frac{x_B}{2}, \qquad a = -y_B.$$

Reemplazando en la ecuación (0.1) se obtiene que

$$\left(\frac{x_B}{2}\right)^2 + y_B^2 = (\ell/2)^2$$

.... 0.4 ptos.

Es decir, reordenando se tiene que

$$\frac{x_B^2}{\ell^2} + \frac{y_B^2}{(\ell/2)^2} = 1$$

.... 0.3 ptos.

Con esto se tiene que el Lugar Geométrico es una elipse de semieje mayor ℓ y semieje menor $\ell/2$ centrada en el origen. .... 0.4 ptos.

Su excentricidad es $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, foco en $F(\frac{\sqrt{3}\ell}{2}, 0)$ y directriz $x = \frac{2\sqrt{3}\ell}{3}$. .... 0.3 ptos.