Control 1, MA1001 Introducción al Cálculo
Departamento de Ingeniería Matemática, FCFM, U. de Chile
Semestre 2008/1 (29 de Abril)

Instrucciones: Este control tiene 3 partes con diferente puntaje (indicado en paréntesis). La nota N del control se calcula con la fórmula $N = P+1$, donde P es el puntaje obtenido.

Parte a) (*2 ptos.*) Usando sólo los axiomas de cuerpo de los reales y los teoremas de unicidad de neutros e inversos, demuestre que si $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ son tales que $a + b = 1$ entonces se cumple que:

El inverso multiplicativo de $(a \cdot b)$ es $(a^{-1} + b^{-1})$.

Solución

P.D.Q.: $(a \cdot b) \cdot (a^{-1} + b^{-1}) = 1$. .... 1 pto.

Esto último es cierto ya que:

$$\begin{aligned}
(a \cdot b) \cdot (a^{-1} + b^{-1}) &= (a \cdot b) \cdot a^{-1} + (a \cdot b) \cdot b^{-1} && \text{; Ax. Distributividad} \\
&= (b \cdot a) \cdot a^{-1} + (a \cdot b) \cdot b^{-1} && \text{; Ax. Conmutatividad} \\
&= b \cdot (a \cdot a^{-1}) + a \cdot (b \cdot b^{-1}) && \text{; Ax. Asociatividad} \\
&= b \cdot 1 + a \cdot 1 && \text{; Ax. El. inverso} \\
&= b + a && \text{; Ax. El. neutro} \\
&= a + b && \text{; Ax. Conmutatividad} \\
&= 1 && \text{; Dato del problema}
\end{aligned}$$

.... 1 pto.

Parte b) (*1.5 ptos.*) Usando las propiedades de orden de los reales, pruebe que si $0 < a < 1$ y $b > 1$ entonces

$$ab + 1 < a + b$$

Solución

P.D.Q: $ab + 1 < a + b$

En efecto, calculemos la diferencia entre las expresiones de la derecha y la izquierda de la proposición anterior. Se tiene que

$$\begin{aligned}
(a + b) - (ab + 1) &= a(1 - b) + (b - 1) \\
&= (1 - a)(b - 1)
\end{aligned}$$

.... 0.5 ptos.

Como $a < 1$ y $b > 1$ se tiene que los factores $(1 - a)$ y $(b - 1)$ son estrictamente positivos. 0.5 ptos.

Como el producto de reales en $\mathbb{R}_+^*$ es cerrado, se tiene que $(1 - a)(b - 1) > 0$. Con esto se concluye la demostración. .... 0.5 ptos.

Parte c) (*2.5 ptos.*) Resuelva la inecuación:

$$\frac{3-2x}{x^2-|2x-3|} \leq 0$$

Solución

El punto crítico de la expresión en módulo $2x-3$ es $x=\frac{3}{2}$. .... 0.4 ptos.

Parte 1: Si $x \in (-\infty, \frac{3}{2})$ la inecuación queda:

$$\frac{3-2x}{x^2+2x-3} \leq 0.$$

.... 0.3 ptos.

Factorizando la expresión cuadrática $x^2+2x-3=(x+1)^2-4=(x-1)(x+3)$ se debe resolver la inecuación

$$\frac{3-2x}{(x-1)(x+3)} \leq 0.$$

.... 0.4 ptos.

Esta expresión factorizada tiene los puntos críticos $\frac{3}{2}, 1, -3$ Por lo tanto construimos la tabla de signos siguiente:

	$(-\infty,-3)$	$(-3,1)$	$(1,\frac{3}{2})$
$3-2x$	>0	>0	>0
$x-1$	<0	<0	>0
$x+3$	<0	>0	>0
$\frac{3-2x}{(x-1)(x+3)}$	>0	<0	>0

Por lo tanto, la solución de la inecuación en este intervalo es $(-3,1)$. .... 0.4 ptos.

Parte 2: Si $x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ la inecuación queda:

$$\frac{3-2x}{x^2-2x+3} \leq 0.$$

.... 0.3 ptos.

Como $x^2-2x+3=(x-1)^2+2$ se tiene que esta expresión es siempre positiva. Por lo tanto la inecuación anterior es equivalente a

$$3-2x \leq 0.$$

La solución de esta última inecuación es todo el intervalo $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$. .... 0.4 ptos.

Juntando las soluciones de las dos partes se concluye que la solución total de la inecuación original es

$$(-3,1) \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

.... 0.3 ptos.