Control 3, MA1001 Introducción al Cálculo
Departamento de Ingeniería Matemática, FCFM, U. de Chile
Semestre 2008/1 (26 de Abril)

P.1) Considere la función real de variable real definida por la ley $f(x) = \dfrac{2x}{1-|x|}$.

a) (*2.0 ptos.*) Encuentre Dominio, ceros y paridad de f.

Solución

Dominio: $x \in \text{Dom}\,(f)$ ssi $1-|x| \neq 0$. Esto último ocurre ssi $x \notin \{-1,1\}$. Por lo tanto

$$\text{Dom}\,(f) = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty).$$

.... 0.7 ptos.

Ceros: $f(x) = 0$ ssi $2x = 0$. Es decir, la función tiene su cero en $x = 0$. .... 0.6 ptos.

Paridad: $f(-x) = \dfrac{2(-x)}{1-|(-x)|} = -\dfrac{2x}{1-|x|} = -f(x)$. Por lo tanto la función es **impar.** . 0.7 ptos.

b) (*2.0 ptos.*) Determine asíntotas verticales y horizontales de f.

Indicación: Analice la función en $\mathbb{R}_+$ y use simetrías.

Solución

En $\mathbb{R}_+$ la función es $f(x) = \dfrac{2x}{1-x}$ que tiene una asíntota vertical en $x = 1$ y una asíntota horizontal a la altura $y = -2$. .... 1.0 ptos.

Por imparidad, se deduce que todas las asíntotas verticales de f están en $x = -1$ y $x = 1$ (Los puntos fuera del dominio).

Todas las asíntotas horizontales son $y = 2$ en $\mathbb{R}_+$ y además $y = -2$ en $\mathbb{R}_-$. .... 1.0 ptos.

c) (*2.0 ptos.*) Demuestre que $\forall y > 0$ existe $x \in (0,1)$ tal que $y = f(x)$. Use este resultado para deducir que f restringida al dominio $(-1,1)$ es epiyectiva en $\mathbb{R}$.

Solución

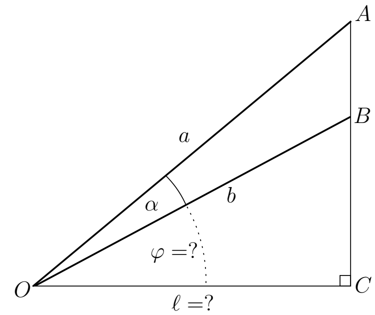
Dado $y > 0$ veamos si existe $x \in (0,1)$ tal que $f(x) = y$.

$y = f(x)$ ssi $y = \frac{2x}{1-x}$ ssi $(1-x)y = 2x$ ssi $y = (2+y)x$ ssi $x = \frac{y}{2+y}$. .... 1.0 ptos.

Esta última ecuación tiene solución para todo $y > 0$. Además su solución $\in (0,1)$ ya que $y < y+2$. .... 0.5 ptos.

Este resultado dice que $f\big((0,1)\big) = \mathbb{R}_+^*$. Por imparidad resulta que $f\big((-1,0)\big) = \mathbb{R}_-^*$ y por lo tanto $f\big((-1,1)\big) = \mathbb{R}$. .... 0.5 ptos.

P.2) En la figura, OAC es un triángulo rectángulo en C y B es un punto interno del lado AC.



Si se conocen solamente los largos de los trazos OA y OB (que valen a y b respectivamente) y el ángulo α formado entre ellos, se desea calcular el largo ℓ del trazo OC.

Para ello introduzca el ángulo auxiliar φ y realice lo siguiente:

a) (*2.5 ptos.*) Use los triángulos OAC y OBC para escribir dos expresiones del lado ℓ en términos de a, b, φ y $\alpha + \varphi$. Use estas expresiones para demostrar que

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a\cos\alpha - b}{a\operatorname{sen}\alpha}.$$

Solución

En el triángulo OAC se tiene que $\ell = a\cos(\alpha+\varphi)$. .... 0.5 ptos.

En el triángulo OBC se tiene que $\ell = b\cos\varphi$ .... 0.5 ptos.

Igualando estas expresiones se tiene que
$b\cos\varphi = a\cos(\alpha+\varphi) = a\cos\alpha\cos\varphi - a\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi$ .... 1.0 ptos.

Despejando se obtiene que $(a\cos\alpha - b)\cos\varphi = a\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi$, de donde se obtiene la relación pedida. .... 0.5 ptos.

b) (*1.5 ptos.*) Si x, p y q son reales tales que $\operatorname{tg} x = \dfrac{p}{q}$, demuestre que

$$|\cos x| = \frac{|q|}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Solución

Si $\operatorname{tg} x = \dfrac{p}{q}$ entonces $p = q\operatorname{tg} x$ y por lo tanto $p^2+q^2 = q^2(1+\operatorname{tg}^2 x) = q^2\sec^2 x$ .... 0.5 ptos.

Con esto, $\sqrt{p^2+q^2} = |q||\sec x|$. .... 0.5 ptos.

Despejando de aquí y recordando que $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, se obtiene la relación pedida. ...... 0.5 ptos.

c) (*2.0 ptos.*) Usando los resultados anteriores, deduzca que

$$\ell = \frac{ab \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}.$$

Solución

Como ya sabemos que $\ell = b\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a\cos\alpha - b}{a \operatorname{sen}\alpha}$, usando la parte **(b)** se tiene que

$$\ell = \frac{ab \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{(a\cos\alpha - b)^2 + (a\operatorname{sen}\alpha)^2}}$$

.... 1.0 ptos.

Desarrollando el cuadrado del denominador y usando que $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$ se obtiene el resultado pedido.

$$\ell = \frac{ab \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}.$$

.... 1.0 ptos.