Control 7, MA1001 Introducción al Cálculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2007/1 (16 de Junio)

P1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}}} = \dfrac{\sqrt{1-0}}{\sqrt[4]{1+0}} = 1.$

.... $\boxed{\text{2 ptos.}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{(e^x-1)\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}{\frac{e^x-1}{x}\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \dfrac{1}{1\cdot 1} = 1.$

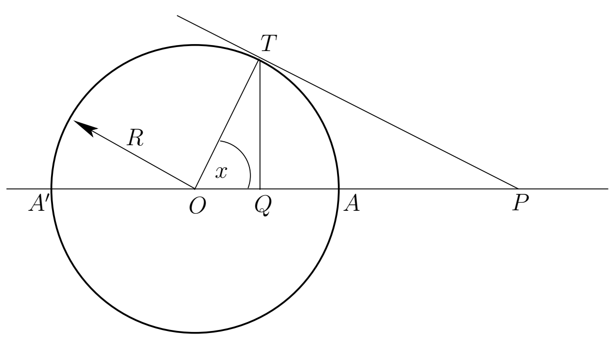
.... $\boxed{\text{2 ptos.}}$

c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-a}{(x^2-a^2)(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b})} =$

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{(x+a)(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b})} = \dfrac{1}{(a+a)(\sqrt{a-b}+\sqrt{a-b})} = \dfrac{1}{4a\sqrt{a-b}}$

.... $\boxed{\text{2 ptos.}}$

P2)



Claramente se tiene que: $OQ = R\cos x$, $OA = R$, $QT = R\sin x$ y $OP = \sec x$.

.... $\boxed{\text{2 ptos.}}$

Por lo tanto:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{QA}{AP} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sec x - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$

.... $\boxed{\text{2 ptos.}}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{AP}{(QT)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sec x - 1}{R\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{R\cos x \sin^2 x} =$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} \cdot \dfrac{1}{R\cos x} \cdot \dfrac{x^2}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{R} \cdot 1 = \dfrac{1}{2R}$ .... $\boxed{\text{2 ptos.}}$

P3) Usando la desigualdad $0 < 1 < e^x$ para $x > 0$ se tiene que

$$1 = \frac{\ln(e^x)}{x} \leq \frac{\ln(1+e^x)}{x} \leq \frac{\ln(2e^x)}{x} = \frac{\ln(2)}{x} + 1, \qquad \forall x > 0.$$

Por lo tanto, tomando límite cuando $x \to +\infty$ y usando el teorema del sandwich se deduce que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = 1$

.... $\boxed{\text{2 ptos.}}$

Para el estudio de la asíntota oblicua hacia $+\infty$, estudiamos el límite siguiente

$$n = \lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^x) - x = \lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^x) - \ln(e^x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(e^{-x}+1) = 0$$

Por lo tanto la asíntota oblicua hacia $+\infty$, es la recta $y = x$.

.... $\boxed{\text{2 ptos.}}$

Hacia $-\infty$ se tiene que

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^x) = 0$$

por lo tanto hacia $-\infty$ la función tiene la asíntota horizontal $y = 0$.

.... $\boxed{\text{2 ptos.}}$