Solución y pauta Control 4, MA1001 Introducción al Cálculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2007/1 (28 de Abril)

Solución P1) Para demostrar que la expresión

$$\cos^2 x + \cos^2(x+y) - 2\cos x \cos y \cos(x+y)$$

es independiente de x (y vale $\operatorname{sen}^2 y$) desarrollamos del modo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\cos^2 x + \cos^2(x+y) - 2\cos x \cos y \cos(x+y)\\
&= \cos^2 x + \cos(x+y)\Big(\cos(x+y) - 2\cos x\cos y\Big)\\
&= \cos^2 x + \cos(x+y)\Big(\cos x\cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - 2\cos x\cos y\Big) \quad \text{——} \; \boxed{\text{2 ptos.}}\\
&= \cos^2 x - \Big(\cos x\cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\Big)\Big(\cos x\cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\Big)\\
&= \cos^2 x - \Big(\cos^2 x\cos^2 y - \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y\Big) \quad \text{——} \; \boxed{\text{2 ptos.}}\\
&= \cos^2 x\big(1-\cos^2 y\big) + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y\\
&= \cos^2 x \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y \quad \text{——} \; \boxed{\text{1 pto.}}\\
&= \big(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x\big)\operatorname{sen}^2 y\\
&= \operatorname{sen}^2 y \quad \text{——} \; \boxed{\text{1 pto.}}
\end{aligned}$$

Solución P2) Para resolver la ecuación

$$\cos x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}.$$

comenzamos por notar que el dominio de definición de la tangente excluye a los puntos de la forma $(2k+1)\frac{\pi}{2}$. —— $\boxed{\text{1 pto.}}$

La ecuación se puede ordenar del modo siguiente:

$$\begin{aligned}
\cos x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} &\iff \cos x \sec^2 x = 2\tan x\\
&\iff \cos x \frac{1}{\cos^2 x} = 2\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\\
&\iff 1 = 2\operatorname{sen} x \quad \wedge \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{——} \; \boxed{\text{3 ptos.}}\\
&\iff x = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6} \quad \wedge \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación es

$$\Big\{k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6}; k\in\mathbb{Z}\Big\} \quad \text{——} \; \boxed{\text{2 ptos.}}$$

Solución P3) a) En el triángulo OMB conocemos dos lados y un ángulo, por lo tanto aplicando el teorema del coseno tenemos que

$$(2R)^2 = R^2 + x^2 - 2Rx\cos(\pi - \alpha), \qquad \boxed{\text{1 pto.}}$$

es decir

$$x^2 + 2Rx\cos(\alpha) - 3R^2 = 0. \qquad \boxed{\text{1 pto.}}$$

Esta es una ecuación cuadrática para x, cuya solución general es

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2R\cos\alpha \pm \sqrt{4R^2\cos^2\alpha + 12R^2}}{2} \\ &= -R\cos\alpha \pm \sqrt{R^2\cos^2\alpha + 3R^2}. \end{aligned} \qquad \boxed{\text{1 pto.}}$$

Como la solución con signo menos entrega siempre un valor negativo, concluimos que en nuestro caso no corresponde.
Por lo tanto

$$x = R\sqrt{\cos^2\alpha + 3} - R\cos\alpha. \qquad \boxed{\text{1 pto.}}$$

b) Para estudiar el crecimiento de la función $f(\alpha) = \sqrt{R^2\cos^2\alpha + 3R^2} - R\cos\alpha$ comenzamos por racionalizar del modo siguiente:

$$f(x) = \frac{3R}{\sqrt{\cos^2\alpha + 3} + \cos\alpha} \qquad \boxed{\text{1 pto.}}$$

De este modo razonamos del modo siguiente:
Como la función coseno es DECRECIENTE en $[0, \pi]$ concluimos que el denominador de la expresión anterior es decreciente y positivo (su mínimo es 1). Por lo tanto, el recíproco (es decir f) es creciente en este intervalo. $\boxed{\text{1 pto.}}$