Control 2, MA1001 CALCULO
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2007/1 (31 de Marzo)

a_1) *(1.5 ptos.)* Resuelva la inecuación

$$\frac{x}{x-1} \geq \frac{x-1}{x-2}$$

a_2) *(1.5 ptos.)* Resuelva la inecuación

$$\frac{x}{|x-1|} \geq \frac{|x-1|}{x-2}$$

Solución a_1

Se ordena la inecuación del modo siguiente:

$$\frac{x}{x-1} \geq \frac{x-1}{x-2} \iff \frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x-2} \geq 0$$
$$\iff \frac{x(x-2)-(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} \geq 0$$
$$\iff \frac{1}{(x-1)(x-2)} \leq 0$$

1.0

La solución es por lo tanto el intervalo $(1,2)$ 0.5

Solución a_2

Se separa la inecuación en los casos $x \in (-\infty, 1)$ y $x \in [1, \infty)$.

Caso 1: $x \in (-\infty, 1)$. En este caso $x-1<0$ luego $|x-1| = -(x-1)$. De este modo, la inecuación en este intervalo queda: 0.2

$$\frac{x}{|x-1|} \geq \frac{|x-1|}{x-2} \iff -\frac{x}{x-1} \geq -\frac{x-1}{x-2}$$
$$\iff \frac{x}{x-1} \leq \frac{x-1}{x-2}$$

0.2

Esta es la inecuación complementaria a la de la parte a_1, luego, su solución en $\mathbb{R}$ es el conjunto $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$. 0.2

La solución de la inecuación en el intervalo considerado es: $(-\infty, 1)$ 0.2

Caso 2: $x \in [1, \infty)$. En este caso $x-1 \geq 0$ luego $|x-1| = (x-1)$. De este modo, la inecuación en este intervalo queda: 0.2

$$\frac{x}{|x-1|} \geq \frac{|x-1|}{x-2} \iff \frac{x}{x-1} \geq \frac{x-1}{x-2}$$

Esta es la inecuación la de la parte a_1, luego, su solución en $\mathbb{R}$ es el conjunto $(1,2)$. 0.2

La solución de la inecuación en el intervalo considerado es: $(1,2)$

La solución final de la inecuación es el conjunto $(-\infty, 1) \cup (1,2)$ 0.3

b) *(3 ptos.)* Considere los puntos $A(a,0)$ y $B(-a,0)$, donde $a>0$. Encuentre el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ tales que las pendientes de las rectas L_{PA} y L_{PB} satisfacen la relación

$$m_{PA}=\frac{2m_{PB}}{1-m_{PB}^2}$$

Solución b

Las pendientes de las rectas L_{PA} y L_{PB} son respectivamente:

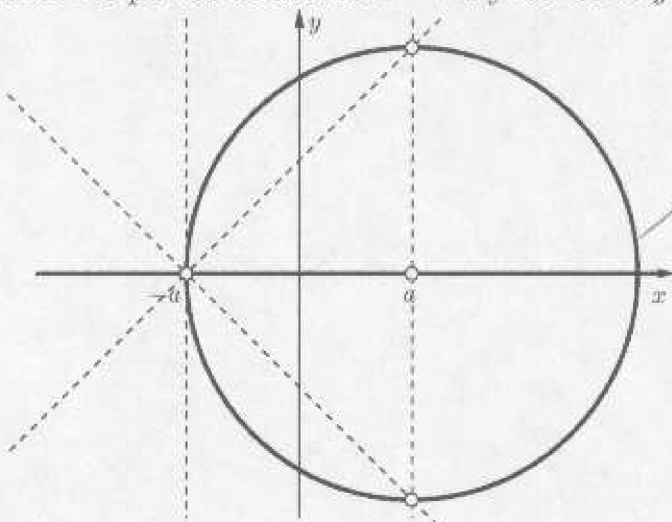
$$m_{PA}=\frac{y}{x-a},\qquad m_{PB}=\frac{y}{x+a}$$ 0.5

Claramente, el punto P debe tener abscisa $x\neq a$ y $x\neq -a$, es decir esas rectas verticales no contienen puntos del Lugar Geométrico buscado.

La condición dada en el problema impone que:

$$\begin{aligned}
P\in \text{L.G.} &\iff m_{PA}=\frac{2m_{PB}}{1-m_{PB}^2}\\
&\iff \frac{y}{x-a}=\frac{2\left(\frac{y}{x+a}\right)}{1-\left(\frac{y}{x+a}\right)^2}\\
&\iff |x|\neq a\wedge y=\frac{2y(x^2-a^2)}{(x+a)^2-y^2}\\
&\iff |x|\neq a\wedge y\neq\pm(x+a)\wedge y\{-x^2+2ax+3a^2-y^2\}=0\\
&\iff \underbrace{|x|\neq a}_{0.5}\wedge y\neq\pm(x+a)\wedge\left(\underbrace{y=0}_{0.5}\vee\underbrace{(x-a)^2+y^2=4a^2}_{0.5}\right)
\end{aligned}$$ 0.5

Por lo tanto, el lugar geométrico corresponde a la unión de la recta $y=0$ (Eje de las X) con la circunferencia $(x-a)^2+y^2=4a^2$ (de centro $(a,0)$ y radio $2a$), eliminando los puntos de abscisa $x=\pm a$ y las rectas $y=\pm(x+a)$. 0.5



o sien gráfico