Problema Resuelto. Guia 3: MA100 Introducción al Cálculo

Profesor: Leonardo Sánchez
Auxiliar: Germán Ibarra - Jorge Monardes

03 de Abril de 2008

Problema.- La base de un triángulo está fija, siendo sus vértices $A = (0,0)$, $B = (b,0)$. El vértice C está sobre la recta $y = c, b > 0$ y $c > 0$. Determinar el lugar geométrico correspondienjte a la intesección de las tres alturas

Sol:
Siempre, en este tipo de problemas, es bueno plantear un buen dibujo

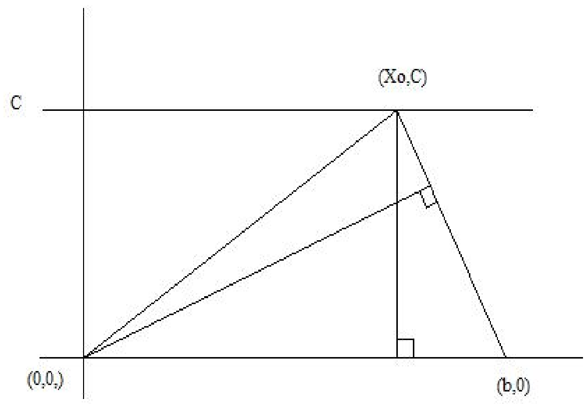

Figura 1: Intersección de dos alturas

Se puede ver que solo se dibujaron dos alturas. Esto es porque la intersección de dos rectas es un punto, y bastan solo dos de las tres rectas para encontrar el punto deseado. La coordenadas de este punto serán llamadas (x_H, y_H). La altura vertical que se observa, tiene coordenada en el eje OX igual a x_0, por lo tanto

$$x_H = x_0$$

Para saber la ecuación de la recta que nace en el origen, es necesario saber la pendiente de la recta que une los otros dos puntos del triángulo.

$$m_2 = \frac{c}{x_0 - b}$$

Luego, por condición de altura

$$m_h \cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_h = \frac{b - x_0}{c}$$

Conocida la pendiente y un punto de la recta (el origen) se puede obtener la ecuación de la recta

$$L: \ y = \frac{b - x_0}{c} x$$

Luego, evaluando en la coordenada x de la intersección (y recordando que $x_0 = x_H$)

$$y_H = \frac{b - x_H}{c} x_H$$

$$c y_H = b x_H - x_H^2$$

Completando cuadrados

$$cy_H = -(x_H^2 - bx_H + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4})$$

$$y_H = \frac{-1}{c}(x - \frac{b}{2})^2 + \frac{b^2}{4c}$$

Lo que corresponde a una parabola con orientación negativa, vertice $(\frac{b}{2}, \frac{b^2}{4c})$ y que corta el eje OX en los puntos $(0,0)$ y $(b,0)$.

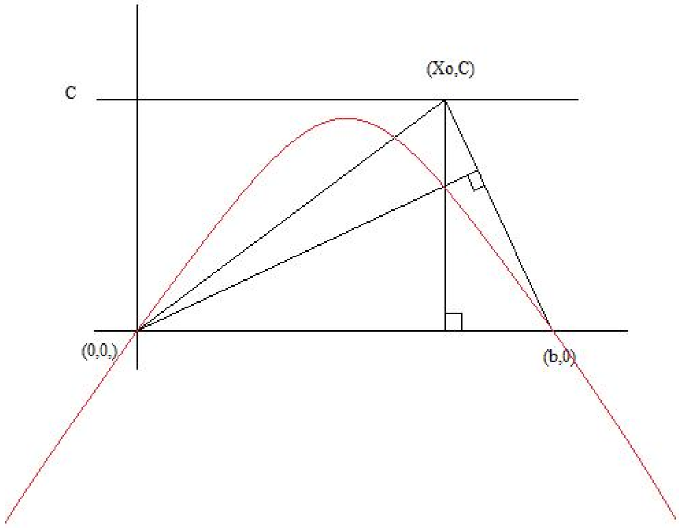

Figura 2: Intersección de dos alturas

Se puede notar que esta es la figura correcta a partir de un análisis simple. El punto $(0,0)$ y el punto $(b,0)$ estan en el lugar geométrico y la distribución de los valores centrales