Clase Auxiliar:

Ejemplos de *B&B* y *FCPA*

Diego A. Morán R.

IN77O

18 de junio de 2008

Contenidos

Contenidos

Problema a Resolver

$$
\begin{array}{rrrrrl}
z_{IP} = max & 7x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\
 & 5x_1 & + & x_2 & \leq & 20 \\
 & -2x_1 & - & 2x_2 & \leq & -7 \\
 & & & x \in \mathbb{Z}^2_+ & &
\end{array}
$$

Introduciremos variables de holgura $x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}_+$. No es necesario pedir integralidad.

Resolviendo la relajación (1)

El tableau en el óptimo es:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
z_{LP} & & & & & + & \frac{3}{11}x_3 & + & \frac{16}{11}x_4 & & & = & \frac{332}{11} \\
& + & x_1 & & & - & \frac{1}{11}x_3 & + & \frac{2}{11}x_4 & & & = & \frac{36}{11} \\
& & & + & x_2 & + & \frac{5}{11}x_3 & + & \frac{1}{11}x_4 & & & = & \frac{40}{11} \\
& & & & & + & \frac{8}{11}x_3 & & \frac{6}{11}x_4 & + & x_5 & = & \frac{75}{11}
\end{array}
$$

con $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$ y $x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}_+$.

Resolviendo la relajación (2)

Es decir,

$$z^0_{LP} = \frac{332}{11}$$

$$x^0 = \begin{pmatrix} \frac{365}{11} & \frac{40}{11} & 0 & 0 & \frac{75}{11} \end{pmatrix}$$

El resultado no es el óptimo entero $\Rightarrow$ hay que *branchear*, en x_1, x_3 ó x_2, variables fraccionarias.

Forma muy usada de elegir la variable

Definiendo la *parte fraccionaria*:

$$f_j^i = x_j^i - \lfloor x_j^i \rfloor$$

Se usa la regla:

$$\max_{j \in N^i} \min\{D_j^{-i}, D_j^{+i}\}$$

con

$$D_j^{-i} = p_j^{-i} f_j^i$$

$$D_j^{+i} = p_j^{+i}(1 - f_j^i)$$

Máxima infactibilidad

El criterio de *máxima infactibilidad* está dado seteando:

$$D_j^{-0} = f_j^0 \text{ y } D_j^{+0} = 1 - f_j^0$$

Es decir, los coeficientes valen uno:

$$p_j^{-i} = p_j^{+i} = 1$$

Aplicando lo anterior al ejemplo

Calculando,

$$D_1^{-0} = \frac{3}{11},\ D_1^{+0} = \frac{8}{11},\ D_2^{-0} = \frac{7}{11}, D_2^{+0} = \frac{4}{11}$$

Y ocupando la regla para elegir la variable:

$$\max_{j \in \{1,2\}} \min\{D_j^{-0}, D_j^{+0}\} = \max\left(\frac{3}{11}, \frac{4}{11}\right) = \frac{4}{11} = D_2^{+0}$$

Con esto,podríamos decidir branchear en la variable x_2 ($x_2 \leq 3$ ó $x_2 \geq 2$) y examinar el hijo derecho asociado.

Uso de penalizaciones (1)

- De las restricciones podemos ver que si x_3 o x_4 crecen, entonces x_2 decrece. Con esto podemos setear $p_2^{+0} = \infty$.
- Siguendo con este razonamiento, z_{LP} decrece en $\frac{3}{5}$ ($\frac{16}{1}$) por unidad que x_2 disminuye cuando x_3 (x_4)se hace variable básica. Con esto podemos setear:

$$p_2^{-0} = \text{mín}\left(\frac{3}{5}, \frac{16}{1}\right) = \frac{3}{5}$$

Similarmente,

$$p_1^{+0} = 3 \text{ y } p_1^{-0} = \frac{16}{2} = 8$$

.

Uso de penalizaciones (1)

- De las restricciones podemos ver que si x_3 o x_4 crecen, entonces x_2 decrece. Con esto podemos setear $p_2^{+0} = \infty$.
- Siguendo con este razonamiento, z_{LP} decrece en $\frac{3}{5}$ ($\frac{16}{1}$) por unidad que x_2 disminuye cuando x_3 (x_4)se hace variable básica. Con esto podemos setear:

$$p_2^{-0} = \text{mín}\left(\frac{3}{5}, \frac{16}{1}\right) = \frac{3}{5}$$

Similarmente,

$$p_1^{+0} = 3 \text{ y } p_1^{-0} = \frac{16}{2} = 8$$

.

Uso de penalizaciones (2)

Calculando

$$D_1^{-0} = \frac{3 \cdot 8}{11} = \frac{24}{11}, \ D_1^{+0} = \frac{8 \cdot 3}{11} = \frac{24}{11}$$

$$D_2^{-0} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{11} = \frac{21}{55}, \ D_2^{+0} = \infty$$

Luego,

$$\max_{j \in \{1,2\}} \min\{D_j^{-0}, D_j^{+0}\} = \max\left(\frac{24}{11}, \frac{21}{55}\right) = \frac{24}{11} = D_1^{-0} = D_1^{+0}$$

Uso de penalizaciones (3)

- Basados en lo anterior, podramos branchear en la variable x_1.
- Pero, la evidencia empírica indica que estos cálculos no valen la pena para problemas de gran tamaño.

Uso de penalizaciones (3)

- Basados en lo anterior, podramos branchear en la variable x_1.
- Pero, la evidencia empírica indica que estos cálculos no valen la pena para problemas de gran tamaño.

Comienza el Bracheo

- Usando el criterio de máxima infactibilidad, decidimos branchear en x_2, agregando las restricción:

$$x_2 \geq 4 \quad (x_2 - t = 4,\ t \geq 0)$$

- Al subproblema así generado lo llamaremos `nodo 1`

Comienza el Bracheo

- Usando el criterio de máxima infactibilidad, decidimos branchear en x_2, agregando las restricción:

$$x_2 \geq 4 \quad (x_2 - t = 4, \; t \geq 0)$$

- Al subproblema así generado lo llamaremos `nodo 1`

Continuando con el branching...

Las restricciones del subproblema (`nodo 1`) quedan dadas por:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
z_{LP} & & & & + & \frac{3}{11}x_3 & + & \frac{16}{11}x_4 & & & = & \frac{332}{11} \\
& + & x_1 & & - & \frac{1}{11}x_3 & + & \frac{2}{11}x_4 & & & = & \frac{36}{11} \\
& & & + \; x_2 & + & \frac{5}{11}x_3 & + & \frac{1}{11}x_4 & & & = & \frac{40}{11} \\
& & & & + & \frac{8}{11}x_3 & + & \frac{6}{11}x_4 & + \; x_5 & & = & \frac{75}{11} \\
& & & & + & \frac{5}{11}x_3 & + & \frac{1}{11}x_4 & & + \; t & = & -\frac{4}{11}
\end{array}
$$

con $x, t \geq 0$.

OBS: En un sistema computacional la restricción de acotamiento no es agregada explícitamente.

Primera poda

- El algoritmo simplex dual muestra inmediatamente que el problema es primal infactible (miren la última restricción).
- Con esto podamos el `nodo 1`, por infactibilidad.

Primera poda

- El algoritmo simplex dual muestra inmediatamente que el problema es primal infactible (miren la última restricción).
- Con esto podamos el `nodo 1`, por infactibilidad.

Explorando otro nodo

Analizando el único otro subproblema posible, que llamaremos `nodo 2`, que corresponde al *IP* original con la restricción adicional

$$x_2 \leq 3, \quad (x_2 + s = 3, \ s \geq 0)$$

La relajación lineal resultante se escribe:

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
z_{LP} & & & & & + & \frac{3}{11}x_3 & + & \frac{16}{11}x_4 & & & & = & \frac{332}{11} \\
& + & x_1 & & & - & \frac{1}{11}x_3 & + & \frac{2}{11}x_4 & & & & = & \frac{36}{11} \\
& & & + & x_2 & + & \frac{5}{11}x_3 & + & \frac{1}{11}x_4 & & & & = & \frac{40}{11} \\
& & & & & + & \frac{8}{11}x_3 & + & \frac{6}{11}x_4 & + & x_5 & & = & \frac{75}{11} \\
& & & & & - & \frac{5}{11}x_3 & - & \frac{1}{11}x_4 & & & + \ s & = & -\frac{7}{11}
\end{array}$$

Relajación lineal nodo 2

Una iteración del algoritmo dual entrega:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
z_{LP} & + & x_1 & & & & & + & \frac{7}{5}x_4 & & & + & \frac{3}{5}s & = & \frac{149}{5} \\
 & + & x_1 & & & & & + & \frac{1}{5}x_4 & & & - & \frac{1}{5}s & = & \frac{17}{5} \\
 & & & + & x_2 & & & & & & & + & s & = & 3 \\
 & & & & & & & + & \frac{2}{5}x_4 & + & x_5 & + & \frac{8}{5}s & = & \frac{29}{5} \\
 & & & & & + & x_3 & + & \frac{1}{5}x_4 & & & - & \frac{11}{5}s & = & -
\end{array}
$$

Con esto $z_{LP}^2 = \frac{149}{5}$ y $x^2 = \left(\frac{17}{5} \quad 3 \quad \frac{7}{5} \quad 0 \quad \frac{29}{5}\right)$

Explorando el `nodo 2`

`nodo 3`

- Puesto que x_1^2 es fraccionaria, brancheamos en x_1, examinando primero el hijo izquierdo, que llamaremos `nodo 3`, pues $f_1^2 < \frac{1}{2}$.
- Agregando la restricción $x_1 \leq 3$ y reoptimizando por el algoritmo simplex dual obtenemos $x^3 = (3 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 5)$, que es una solución (óptima) entera, con $z_{LP}^3 = 27$.
- Luego, el `nodo 3` puede ser podado y podemos actualizar $\underline{z_{IP}} = 27$ (tenemos una solución entera factible).

Explorando el `nodo 2`
`nodo 3`

- Puesto que x_1^2 es fraccionaria, brancheamos en x_1, examinando primero el hijo izquierdo, que llamaremos `nodo 3`, pues $f_1^2 < \frac{1}{2}$.
- Agregando la restricción $x_1 \leq 3$ y reoptimizando por el algoritmo simplex dual obtenemos $x^3 = (3 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 5)$, que es una solución (óptima) entera, con $z_{LP}^3 = 27$.
- Luego, el `nodo 3` puede ser podado y podemos actualizar $\underline{z_{IP}} = 27$ (tenemos una solución entera factible).

Explorando el nodo 2

nodo 3

- Puesto que x_1^2 es fraccionaria, brancheamos en x_1, examinando primero el hijo izquierdo, que llamaremos nodo 3, pues $f_1^2 < \frac{1}{2}$.
- Agregando la restricción $x_1 \leq 3$ y reoptimizando por el algoritmo simplex dual obtenemos $x^3 = (3 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 5)$, que es una solución (óptima) entera, con $z_{LP}^3 = 27$.
- Luego, el nodo 3 puede ser podado y podemos actualizar $\underline{z_{IP}} = 27$ (tenemos una solución entera factible).

Explorando el `nodo 2`

`nodo 4`

- El único nodo que nos queda por estudiar en la lista de nodos candidatos es el subproblema obtenido al agregar al problema resuelto en el nodo 2 la restriccón $x_1 \geq 4$ (estamos brancheando en la variable x_1), a este nodo le llamaremos `nodo 4`.
- Resolviendo la relajación lineal de este nodo obtenemos $x^4 = (4 \quad 0 \quad 8 \quad 0 \quad 1)$ y $z^4_{LP} = 28$.
- Luego, el `nodo 4` es podado por el criterio de optimalidad y podemos actualizar $\underline{z_{IP}} = 28$.

Explorando el $\texttt{nodo 2}$
$\texttt{nodo 4}$

- El único nodo que nos queda por estudiar en la lista de nodos candidatos es el subproblema obtenido al agregar al problema resuelto en el nodo 2 la restriccón $x_1 \geq 4$ (estamos brancheando en la variable x_1), a este nodo le llamaremos $\texttt{nodo 4}$.
- Resolviendo la relajación lineal de este nodo obtenemos $x^4 = (4 \quad 0 \quad 8 \quad 0 \quad 1)$ y $z^4_{LP} = 28$.
- Luego, el $\texttt{nodo 4}$ es podado por el criterio de optimalidad y podemos actualizar $\underline{z_{IP}} = 28$.

Explorando el `nodo 2` `nodo 4`

- El único nodo que nos queda por estudiar en la lista de nodos candidatos es el subproblema obtenido al agregar al problema resuelto en el nodo 2 la restriccón $x_1 \geq 4$ (estamos brancheando en la variable x_1), a este nodo le llamaremos `nodo 4`.
- Resolviendo la relajación lineal de este nodo obtenemos $x^4 = (4 \quad 0 \quad 8 \quad 0 \quad 1)$ y $z^4_{LP} = 28$.
- Luego, el `nodo 4` es podado por el criterio de optimalidad y podemos actualizar $\underline{z_{IP}} = 28$.

Fin del algoritmo

- La lista de nodos activos es vacía, así el algoritmo ha terminado, pues no quedan nodos o subproblemas por explorar.
- El algoritmo entrega como resultado la solución óptima entera $x = x^4$, con valor objetivo $z_{ip} = 28$.

Fin del algoritmo

- La lista de nodos activos es vacía, así el algoritmo ha terminado, pues no quedan nodos o subproblemas por explorar.
- El algoritmo entrega como resultado la solución óptima entera $x = x^4$, con valor objetivo $z_{ip} = 28$.

Contenidos

Problema a Resolver

$$
\begin{array}{rrcrcr}
z_{IP} = max & 7x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\
 & 5x_1 & + & x_2 & \leq & 20 \\
 & -2x_2 & - & 2x_2 & \leq & -7 \\
 & & & x \in \mathbb{Z}^2_+ & &
\end{array}
$$

Que es el mismo problema que acabamos de resolver usando *Branch&Bound*.

Problema anterior escrito en forma de igualdad

Para usar la metodología directamente debemos escribir

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
 & \text{máx}\, x_0 & & & & & & & & & & & & \\
x_0 & - & 7x_1 & -2x_2 & & & & + & & & & = & 0 \\
 & - & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & & & & = & 4 \\
 & + & 5x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 20 \\
 & - & 2x_1 & - & 2x_2 & + & & & & + & x_5 & = & -7
\end{array}
$$

Con $x_0 \in \mathbb{Z}$, y $x_j \in \mathbb{Z}_+,\ \forall\, j = 1, \ldots, 5$

Resolviendo la relajación del *IP*

Escribiendo las restricciones dada la base óptima:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
x_0 & & & & & + & \frac{3}{11}x_3 & + & \frac{16}{11}x_4 & & & = & \frac{332}{11} \\
 & + & x_1 & & & - & \frac{1}{11}x_3 & + & \frac{2}{11}x_4 & & & = & \frac{36}{11} \\
 & & & + & x_2 & + & \frac{5}{11}x_3 & + & \frac{1}{11}x_4 & & & = & \frac{40}{11} \\
 & & & & & + & \frac{8}{11}x_3 & & \frac{6}{11}x_4 & + & x_5 & = & \frac{75}{11}
\end{array}
$$

Con $x_3 = x_4 = 0$ obtenemos la solución básica óptima de la relajación.

Corte de Gomory

Para la restricción *i*ésima del problema, escrito en función de la base óptima, con x_{B_i} variable básica y H el conjunto de índices de variables no básicas:

$$x_{B_i} + \sum_{j \in H} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{a}_{i0}$$

La restricción asociada siguiente es válida (para el IP):

$$\sum_{j \in H} f_{ij} x_j = f_{i0} + x_{n+1}$$

con $f_{ij} = \bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor$, $f_{i0} = \bar{a}_{i0} - \lfloor \bar{a}_{i0} \rfloor$ y $x_{n+1} \in \mathbb{Z}_+$ variable de holgura.

Aplicación al problema anterior

A la restricción

$$x_0 \qquad + \quad \frac{3}{11}x_3 \quad + \quad \frac{16}{11}x_4 \qquad = \quad \frac{332}{11}$$

Se le asocia el siguiente corte de Gomory:

$$\frac{3}{11}x_3 + \frac{5}{11}x_4 = \frac{2}{11} + x_6, \ \ x_6 \in \mathbb{Z}_+$$

En términos de las variables originales obtenemos la siguiente desigualdad válida:

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

Iteración 1

La solución de la relajación lineal del problema original, que llamamos RP^1, se escribe:

$$(x_0^1, x^1) = (x_0^1, x_1^1, \ldots, x_5^1) = \begin{pmatrix} \frac{332}{11} & \frac{365}{11} & \frac{40}{11} & 0 & 0 & \frac{75}{11} \end{pmatrix}$$

Eligiendo la restricción

$$+ \quad x_2 \quad + \quad \frac{5}{11}x_3 \quad + \quad \frac{1}{11}x_4 \qquad = \quad \frac{40}{11}$$

Iteración 1

Obtenemos el corte

$$\frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 = \frac{7}{11} + x_6, \;\; x_6 \in \mathbb{Z}_+$$

Que en términos de las variables originales es

$$x_2 \leq 3$$

Iteración 2

Sea RP^2 la relajación lineal dada por agregar a RP^1 el corte de Gomory anterior. Una solución óptima es:

$$(x_0^2, x^2) = \begin{pmatrix} \frac{149}{5} & \frac{17}{5} & 3 & \frac{7}{5} & 0 & \frac{29}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Eligiendo la restriccón

$$x_0 \quad + \quad \tfrac{7}{5}x_4 \quad + \quad \tfrac{3}{5}x_6 \quad = \quad \frac{149}{5}$$

Iteración 2

Nos da el corte:

$$\frac{2}{5}x_4 + \frac{3}{5}x_6 = \frac{4}{5} + x_7, \;\; x_7 \in \mathbb{Z}_+$$

Que considerando las variables originales se escribe:

$$2x_1 + x_2 \leq 9$$

Iteración 3

Sea RP^3 el problema obtenido al agregar el corte de Gomory a RP^2. Una solución óptima es:

$$x_3 = \begin{pmatrix} 29 & \frac{11}{3} & \frac{5}{3} & \frac{13}{3} & 0 & \frac{11}{3} & \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Para la restricción:

$$x_2 - \tfrac{2}{3}x_4 + \tfrac{5}{3}x_7 = \tfrac{5}{3}$$

Iteración 3

El corte de Gomory asociado es:

$$\frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_7 = \frac{2}{3} + x_8 \; x_8 \in \mathbb{Z}_+$$

Que se escribe, en función de las variables originales como:

$$3x_1 + x_2 \leq 12$$

Iteración 4

Finalmente, RP^4, que se obtiene de agregar este último corte a RP^3 tiene como solución (relajada) a:

$$x_4 = (28 \quad 4 \quad 0 \quad 8 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad 0)$$

Que resulta ser óptima para IP, el problema entero original.

Aquí el algoritmo termina...

Contenidos

Texto consultado (la Biblia...)

- G. Nemhauser and L. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*.

La clase se basó en los ejemplos `2.1` y `3.1`, de las secciones `II.4.2` y `II.4.3`, respectivamente.