Guía 1 IN77O/CI53J/CI73B 2008

Profesor de cátedra: Cristian Cortés, Daniel Espinoza.
Profesores auxiliares: Gustavo Angulo, Diego Morán, José Muñoz.

Problema 1. Considere el problema de k-*coloreo*, el cual consiste colorear, con alguno de k colores dados, cada uno de los nodos de un grafo de tal manera que para todo arco (i, j), los nodos i y j no posean el mismo color.

(a) Suponga que queremos elegir los colores de los países en un mapa del mundo de tal manera que ningún par de países adyacentes posea el mismo color. Muestre que si el número de colores disponibles es k, el problema puede ser formulado como un k-coloreo.

(b) Pruebe que el problema de k-coloreo tiene solución si y sólo sí el conjunto de los nodos puede ser particionado en k o menos subconjuntos disjuntos tal que ningún arco conecta 2 nodos pertenecientes al mismo subconjunto.

(c) Demuestre que, cuando el grafo es un árbol, el problema de 2-coloreo posee solución. HINT: Primero coloree un nodo cualquiera i y luego coloree el resto de los nodos basados en su "distancia" a i.

(d) Muestre que si cada nodo posee a lo más $k - 1$ vecinos, entonces el problema de k-coloreo posee solución.

Problema 2.

a) En nuestra discusión acerca de algoritmos de rutas mínimas, a menudo asumimos que la red no contiene arcos paralelos (es decir, no existen múltiples arcos con los mismos nodos cabeza y cola). ¿Cómo resolvería usted un problemas de rutas mínimas en una red con arcos paralelos?

b) Demuestre que en el problema de rutas mínimas, si el largo de algún arco decrece en k unidades, la distancia mínima entre cualquier par de nodos decrece a lo más en k unidades.

Problema 3.

1. Considere el problema de flujo a costo mínimo con las restricciones adicionales de que la cantidad total de flujo saliente de cada nodo i debe pertenecer al intervalo $[l_i, u_i]$, es decir,

$$l_i \leq \sum_{\{j:(i,j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij} \leq u_i$$

Formule este problema como uno de flujo a costo mínimo standard, separando cada nodo en 2 nodos y agregando un arco que los conecte.

2. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando brevemente su respuesta.

   I. Si todos los arcos de una red tienen costo diferente, es decir, $\forall(i,j) \neq (l,k)$ sse tiene $a_{ij} \neq a_{lk}$, entonces la red posee un único árbol de rutas mínimas partiendo desde un nodo arbitrario.

   II. En una red dirigida con arcos de largo positivo, si eliminamos la dirección de cada arco (resultando en una red no dirigida), las distancias de ruta mínima no cambiarán.

   III. Entre todas las rutas mínimas en una red, el algoritmo de Dijkstra siempre encuentra la ruta mínima conteniendo el mínimo número de arcos posible.

Problema 4.

a) (3 ptos.) Considere una red con un origen s y un destino t. Se desea encontrar k rutas desde s a t de forma que no compartan nodos, salvo los extremos, y tales que la suma de los costos de las k rutas sea mínima. Formule este problema como un problema de flujo a costo mínimo. Indicación: reemplace cada nodo $i \in \mathcal{N} \setminus \{s,t\}$ por dos nodos conectados de forma adecuada.

b) (3 ptos.) Recuerde que el *Problema de Asignación* se puede formular de la siguiente manera:

$$max \quad \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} a_{ij}x_{ij}$$

$s.a.$

$$\sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} = 1, \quad \forall i = 1,\ldots,n$$

$$\sum_{\{i:(i,j)\in A\}} x_{ij} = 1, \quad \forall j = 1,\ldots,n$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1, \qquad \forall (i,j) \in A$$

Formule el dual del problema anterior y encuentre las condiciones de Holgura Complementaria asociadas.

Problema 5.

1. Considere una implementación del algoritmo genérico para rutas mínimas, asumiendo sólo arcos de costo no negativo.

   a) (2 ptos.) Considere un nodo j satisfaciendo en algún instante

   $$d_j \leq d_i \quad \forall i \in V$$

   Muestre que esta relación se mantendrá en lo que resta del algoritmo y que j no volverá a entrar a V. Más aún, muestre que d_j no será modificado.

   b) (1 pto.) Suponga que el algoritmo está estructurado de forma tal que remueve de V un nodo de etiqueta mínima al menos una vez cada k iteraciones, con k algún natural. Muestre que el algoritmo termina en a lo más kN iteraciones.

2. Suponga que son conocidos los costos de las rutas mínimas para ir de un nodo s a todos los nodos de la red, denotados por d_i^s, $\forall i \in \mathcal{N}$, y que existen arcos (pero no ciclos) de costo negativo. Considere el problema de calcular las rutas mínimas desde otro nodo s' al resto de los nodos. Para resolverlo, se propone la siguiente modificación de los costos

   $$\overline{a_{ij}} = a_{ij} + d_i^s - d_j^s,\ \forall (i,j) \in \mathcal{A}$$

   a) (1 pto.) Muestre que $\overline{a_{ij}} \geq 0,\ \forall (i,j) \in \mathcal{A}$.

   b) (1.5 ptos.) Pruebe que al resolver el problema con costos modificados se obtienen exactamente las mismas rutas mínimas que se hubieran obtenido considerando los costos originales.

   c) (0.5 ptos.) ¿Qué ventajas tiene realizar esta modificación en los costos?

Problema 6. Considere una instancia del problema de transporte donde existe exceso de demanda. Considere un nodo fuente adicional A tal que $\alpha_A = \sum_j \beta_j - \sum_i \alpha_i$ y costos a_{Aj}.

(a) Reformule el problema como un problema de transporte equilibrado agregando las variables y restricciones que sean necesarias.

(b) Si $\forall j \quad a_{Aj} = 0$, muestre que los valores óptimos del problema original y del modificado coinciden. Cómo se relacionan las soluciones óptimas respectivas?

(c) Si $\forall j \quad a_{Aj} = c$, muestre que los valores óptimos del problema original y del modificado difieren en una constante independiente de la solución óptima. Cómo se relacionan las soluciones óptimas respectivas?

(d) Si existen j y j' tales que $a_{Aj} \neq a_{Aj'}$, qué puede decir de las soluciones y valores óptimos de cada problema?

Problema 7. Considere $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset \mathbb{R}$. Se desea particionar A en grupos satisfaciendo:

- Cada grupo debe tener al menos p elementos.
- Los números de cada grupo deben ser consecutivos. Por ejemplo, no se permite que un grupo contenga a_1 y a_3 sin contener a_2.

Se quiere minimizar la suma de las desviaciones cuadráticas medias de cada grupo. La desviación cuadrática media de un grupo S se define por

$$d(S) = \frac{1}{|S|}\sum_{i\in S}(a_i - \overline{a_S})^2 \qquad \overline{a_S} = \frac{1}{|S|}\sum_{i\in S} a_i$$

(a) Formule el problema de encontrar estos grupos como un problema de rutas mínimas.

(b) Resuelva la siguiente instancia del problema, usando algún método para calcular rutas mínimas: $n = 5, p = 2, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = 2, a_5 = -2$.

(c) Si ahora en lugar de $d(S)$, se minimiza la suma de $f(S)$ con $f : \mathcal{P}(A) \to \mathbb{R}_+$, donde $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de las partes de A o conjunto potencia de A, cómo queda la formulación del problema?

Problema 8. Una empresa de arriendo de autos necesita una cantidad conocida de vehículos $r_1, \ldots, r_n$ para los próximos n días. Al final de cada día se debe decidir cuántos vehículos son enviados a la lavandería rápida (1 día, costo f por vehículo), cuántos a la lavandería lenta (2 días, costo $s < f$ por vehículo), y cuántos son guardados sucios. La demanda de vehículos es satisfecha a partir de autos limpios provenientes de cada lavandería y, en caso que falten, es posible encargar autos adicionales a la central incurriendo en un costo p por vehículo. Inicialmente la empresa no tiene autos.

(a) Formule el problema como uno de Transporte (flujo a costo mínimo). Para ello construya un grafo en que:

- La demanda del día i se representa mediante demandas en los nodos m_i y la oferta de autos se representa mediante los oferta en nodos t_i, donde m_i y t_i representan la mañana y la tarde del día i. ¿cuánto debe ser la demanda en el nodo m_i y cuánto la oferta en el nodo t_i?
- Represente las lavanderías como arcos que van de un día al día correspondiente (Recuerde que hay dos tipos de lavanderías). ¿Entre qué nodos van estos arcos?
- Represente la acumulación de autos sucios como arcos que van de un día al día siguiente. ¿Entre qué nodos van estos arcos?
- Por último, agregue el nodo C que representa a la central de donde se piden los autos y a donde se devuelven después del último día (Recuerde que es posible pedir autos a la central para cualquier día). ¿Qué arcos salen y entran de éste último nodo?
- Agregue los costos correspondientes a los arcos.

(b) Resuelva para el caso $n = 4$, $r_1 = 8$, $r_2 = 6$, $r_3 = 10$, $r_4 = 7$, $f = 6$, $s = 3$ y $p = 10$.

Problema 9.

1. A continuación se muestra una iteración del algoritmo de Hitchcock para un problema de transporte:

x_{ij}	1		2		3		4		S_i
1	9		7		12		8		18
		4		14					
2	15		12		12		15		4
						4			
3	8		9		6		12		6
		2				4			
4	14		12		11		12		12
						7		5	
D_j	6		14		15		5		

Responda breve y justificadamente las siguientes preguntas:

(a) ¿Es una solución factible?

(b) Muestre que la solución es óptima.

(c) ¿Es la solución óptima única?

(d) Proporcione la formulación matemática del problema original y su dual.

(e) ¿Cuál es la solución óptima del problema dual?

(f) Suponga que el costo del arco $(4, 3)$ se incrementa de 11 a 13. Determine la nueva solución óptima primal.

2. Para el siguiente *tableau* asociado al problema de transporte de Hitchock:

x_{ij}	1	2	3	4	α_i
1		10			10
2			11	4	15
3	10	1		10	21
β_j	10	11	11	14	46

con la siguiente matriz de costos asociada

a_{ij}	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	5	4	3	1
3	1	3	3	2

¿Cuál de las siguientes alternativas provee un resumen válido del status del *tableau*?

(a) La solución óptima del problema de transporte de Hitchock, donde $C_{min} = 100$.

(b) Una solución inicial factible obtenida utilizando la regla de mínimo costo.

(c) Una solución degenerada, en la cuál la celda $(1, 3)$ podría hacerse básica y continuar con el algoritmo.

(d) Un tableau intermedio, donde la celda $(3, 3)$ es la próxima en entrar a la base.

(e) Ninguna de las anteriores.

Fundamente claramente su respuesta. Respuestas sin fundamento no obtendrán puntaje.