Programación Entera y Combinatorial: Introducción

Daniel Espinoza

Universidad de Chile, DII, IN77O

7 de mayo de 2008

Contenidos

¿Qué es Optimización Entera y Combinatorial?

Propósito

IP y CO se preocupan de problemas de maximización o minimización de funciones de muchas variables, sujetos a restricciones de desigualdad y/o igualdad, y sujetos a restricciones de integralidad en algunas o todas sus variables.

Algunos Ejemplos y Usos:

- Manejo y uso eficiente de recursos escasos:
  - Distribución de bienes.
  - Programas de producción.
  - Secuenciamiento de máquinas.
  - Industria Forestal.
  - Industria Minera.
  - Industria Vitivinícola.
- Problemas de planificación:
  - Problema de portafolio.
  - Localización de plantas.
  - Decisiones de inversión.
  - Fútbol Fixture.

Algunos Ejemplos y Usos

- Problemas de diseño:
  - Diseño de redes de comunicaciones y transportes.
  - Diseño de circuitos VLSI.
  - Redes aéreas y sus precios.
- En matemáticas:
  - Combinatoria.
  - Teoría de grafos.
  - Lógica.
- Aplicaciones Científicas:
  - Biología molecular.
  - Física de alta energía.
  - Cristalografía.
  - Confiabilidad de datos estadísticos.
  - Demostración de cotas.
  - Diseño de experimentos.

Historia

- Antecedentes:
  - Segunda guerra mundial.
  - Aparición algoritmo simplex [Dan48, Dan91].
  - Primer problema entero (USS Navy).
  - Primer computador y programa.
  - Primeros algoritmos para IP.
- Primeros usos:
  - Industria petrolera.
  - Industria aérea (especialmente USS).
- Estado actual:
  - Capacidad ha aumentado [BFG+00] en un factor de 1e6.
  - Uso estandard en muchas industrias.

Modelando con variables binarias

Variables binarias

Idea es modelar eventos alternativos excluyentes (Ej.: construir una planta o no), pero cuyo resultado es una salida del modelo.

$$x = \begin{cases} 1 & \text{si evento ocurre.} \\ 0 & \text{si evento no ocurre.} \end{cases}$$

Knapsack Problem:

Se tienen n proyectos a realizar, cada uno a un costo a_j y con un beneficio c_j, y se dispone de un fondo máximo de a. Se busca la mejor solución *entera* al problema.

Modelando con variables binarias

Formulación del Knapsack Problem:

$$\max_{x}\left\{\sum_{i=1}^{n} c_j x_j : \sum_{i=1}^{n} a_j x_j \leq a, x \in \{0,1\}^n\right\}$$

Assignment Problem:

Tenemos n personas y m trabajos a realizar. Cada persona puede realizar a lo mas un trabajo, y todos los trabajos deben ser realizados. Para que la persona i realice el trabajo j debemos pagar un costo de c_{ij}. Buscamos una solución a costo mínimo.

Modelando con variables binarias

Formulación del Assignment Problem:

Definimos x_{ij} variable binaria que indica si la persona i esta asociada al trabajo j.

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{mín} & \displaystyle\sum_{i=1,j=1}^{n,m} c_{ij}x_{ij} & & & \\
s.t. & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} & = & 1 & \forall j = 1, \ldots, m \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} & \leq & 1 & \forall i = 1, \ldots, n \\
& x & \in & \{0,1\}^{n\times m} &
\end{array}
$$

Modelando con variables binarias

Set covering, set packing y set partitioning:

Consideremos $M = \{1, \ldots, m\}$, y $N = \{1, \ldots, n\}$. y sean $M_j \subseteq M$ para $j \in N$. Decimos que $F \subseteq N$ cubre (*covers*) M si $M = \bigcup_{i \in F} M_i$. Decimos que $F \subseteq N$ es un empaquetamiento (*packing*) con respecto a M si $M_i \cap M_j = \emptyset \forall i \neq j \in F$. Finalmente decimos que $F \subseteq N$ es un partición (*partition*) de M si es un covering y un packing al mismo tiempo. Supongamos que escoger el conjunto M_j tiene un costo/beneficio de c_j, y queremos obtener el conjunto F que sea un cover/packing/partition de costo/beneficio mínimo:

Modelando con variables binarias

Formulación de Set Packing/Covering/Partition:

Definamos x_j como uno si $j \in F$, cero si no, y $A \in \{0,1\}^{m \times n}$ como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in M_j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Entonces, el problema se escribe como

$$\max(\min) \{cx : Ax \lesseqgtr e\}$$

Donde e es el vector de unos.
Ejemplo: Problema de localización de hospitales.

Modelando Relaciones entre eventos:

Queremos capturar relaciones entre eventos, como simultaneidad, complementareidad, precedencia, etc.

- Consideremos x_1, x_2 dos variables binarias que representan ciertos eventos.
- Si x_1 y x_2 son excluyentes, usamos $x_1 + x_2 \leq 1$.
- Si x_1 y x_2 deben pasar al mismo tiempo, usamos $x_1 - x_2 = 0$.
- Si x_1 solo puede pasar si x_2 pasa, usamos $x_1 - x_2 \leq 0$.
- Supongamos que una actividad puede ocurrir y a un nivel $0 \leq y \leq u$, pero sólo si x_1 ocurre, usamos $y - ux_1 \leq 0$.

Modelando Relaciones entre eventos:

Facility Location Problem:

Conocemos un conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ de posibles ubicaciones para plantas. Y se tiene un conjunto $I = \{1, \ldots, m\}$ de clientes a atender. Cada planta puede abrirse a un costo fijo c_j. Si el cliente i es atendido de la planta j, se tiene un costo de servicio de h_{ij}. Por el momento asumimos que no hay capacidad máxima de planta. El objetivo es escoger que plantas abrir y a que planta asignar cada cliente a costo mínimo.

Modelando Relaciones entre eventos:

Formulación del Facility Location Problem:

Definimos x_j representando la decisión de abrir la planta $j \in N$ o no, y definimos y_{ij} representando la decisión de atender el cliente i desde la planta j.

$$\begin{array}{lrcll} \min & cx + hy & & & \\ s.t. & \sum_{j \in N} y_{ij} & = & 1 & \forall i \in I \\ & y_{ij} - x_j & \leq & 0 & \forall i \in I, j \in N \end{array}$$

¿Qué pasa si cada planta tiene una capacidad máxima de b_j y cada cliente demanda d_i unidades?

Modelando Relaciones entre eventos:

Fixed-Charge Network Flow Problem:

Dada una red dirigida $G = (V, E)$, donde V son posibles nodos, y $e = (u, v) \in E$ son conecciones directas de i a j. Cada nodo tiene una demanda d_i (signo da si es nodo fuente, pasada, o destino), y se asume $\sum b_i = 0$. Cada arco tiene asociada una capacidad u_e y un costo unitario h_e y un costo fijo por uso c_e.
El problema es encontrar una sub-red que permita satisfacer demandas a costo mínimo satisfaciendo las condiciones de flujo.

Modelando Relaciones entre eventos:

Formulación del Fixed-Charge Network Flow Problem:

Definimos $y \in \mathbb{R}^E_+$ para representar las variables de flujo. Definimos $x \in \{0,1\}^E$ para representar la selección de arcos en la sub-red. Así el modelo se puede escribir:

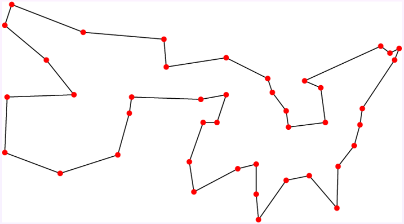
$$
\begin{array}{lrcll}
\min & cx + hy & & & \\
s.t. & y_e & \leq & u_e & \forall e \in E \\
 & \sum_{e\in\delta^-(v)} y_e - \sum_{e\in\delta^+(v)} y_e & = & d_v & \forall v \in V \\
 & y_e - u_e x_e & \leq & 0 & \forall e \in E \\
 & y & \in & \mathbb{R}^E_+ & \\
 & x & \in & \{0,1\}^E &
\end{array}
$$

¿Extensión caso de nodos opcionales y con costo fijo?

Modelando Relaciones entre eventos:

Traveling Salesman Problem:

Dado un conjunto de puntos V y un conjunto de arcos no dirigidos E, cada uno con un costo asociado $c_e,\ \forall e \in E$. Buscamos la forma de visitar todas y cada uno de los puntos exactamente una vez, volviendo al punto de partida, a costo mínimo.



Modelando Relaciones entre eventos:

Formulación TSP:

Para $e=(u,v)$ definimos x_e indicando si en nuestro *tour* visitamos punto u y v consecutivamente. Con esto la formulación puede escribirse como

$$
\begin{array}{llcll}
\min & cx & & & \\
s.t. & \sum_{e\in\delta(v)} x_e & = & 2 & \forall v\in V \\
 & \sum_{e\in\delta(U)} x_e & \geq & 2 & \forall \emptyset \subsetneq U \subsetneq V \\
 & x & \in & \{0,1\}^E &
\end{array}
$$

¿Podemos mejorar algo la formulación? ¿Qué tan grande es? ¿Podemos resolver el LP asociado?

Modelando relaciones no lineales:

Funciones lineales por trazos

$f(x) : [a_o, a_{n+1}] \to \mathbb{R}$ se dice lineal por trazo si $f(x) = f_i + s_i * (x - a_i)$ si $x \in (a_i, a_{i+1})$ para algún $i \in \{0, \ldots, n\}$, donde f_i es el valor inicial en $x = a_i$ y s_i es la pendiente del trazo lineal en adelante.

Nótese que suponemos que $a_i < a_{i+1}$ para $i = 0, \ldots, n$.

Modelando relaciones no lineales:

Minimizando funciones lineales por trazos:

Definimos $u_i = a_i - a_{i+1}$, $y_i \in [0, u_i]$, $x_i \in \{0, 1\}$, y $f'_i = f_i - f_{i-1} - s_{i-1}u_{i-1}$ para $i = 0, \ldots, n$.
Con esto podemos escribir:

$$\begin{array}{rrcll} w = \text{mín} & f'x + sy & & & \\ s.t. & y_i - u_i x_i & \leq & 0 & \forall i \\ & y_i - u_i x_{i+1} & \geq & - & \forall i < n \\ & x_{i+1} - x_i & \leq & 0 & \forall i \\ & z - \sum_{i=0}^{n} y_i & = & a_o & \end{array}$$

¿Qué condiciones deben ocurrir para que $w = \text{mín}_{z \in [a_o, a_{n+1}]} f(z)$?

Modelando relaciones no lineales:

Caso funciones convexas continuas

La condición de convexidad y continuidad implican dos cosas: $f_i + s_i * u_i = f_{i+1}$, $s_i < s_{i+1}$. Por lo que $f' \equiv 0$, además, notemos que si $y_i > 0$ entonces todos los $y_j : j < i$ satisfacen $y_j = u_j$. Eso simplifica el modelo a

$$\begin{array}{rrcll} w = f_o + \text{mín} & sy & & & \\ s.t. & y_i & \leq & u_i & \forall i \\ & z - \sum_{i=0}^{n} y_i & = & a_o & \end{array}$$

¿Análogo caso de maximización? ¿Que tan buena/mala es la relajación lineal? ¿Existen mejores modelos? ¿Podemos usar menos variables binarias?

Modelando relaciones no lineales:

Restricciones Disyuntivas:

Consideremos el siguiente ejemplo, sean $x_i \in [l_1, u_1]$ para $i = 1, 2$, y queremos modelar $y = \min\{x_1, x_2\}$. Esto podemos modelarlo como $y \leq x_i$ para $i = 1, 2$ y como $y \geq x_1$ o $y \geq x_2$. El problema es como modelar esta alternativa.

El caso general:

En general la restricción es dado m conjuntos polihedrales, encontrar un punto que pertenezca al menos a k de estos conjuntos. En este caso podemos asumir $P^i = \{y \in \mathbb{R}^n_+ : A^i y \leq b^i, y \leq d\}$.

Modelando relaciones no lineales:

Formulando restricciones disyuntivas:

Definimos $x_i : i = 1, \ldots, m$ para indicar si $y \in P^i$ o no. Además, note que existe w^i tal que $A^i y \leq b^i + w^i$ para todo $y \in \mathbb{R}^n, y \leq d$. Con esto la restricción puede escribirse como:

$$
\begin{array}{rcl}
A^i y & \leq & b^i + w^i(1 - x_i) \quad \forall i = 1, \ldots, m \\
\sum_{i=1}^{m} x_i & \geq & k \\
0 \leq & y & \leq d \\
x & \in & \{0,1\}^m
\end{array}
$$

¿Cómo formulamos el ejemplo entonces?

Modelando relaciones no lineales:

A Scheduling Problem

Consideremos n trabajos, y m máquinas. Cada trabajo j debe pasar por cada máquina en un orden específico, dado por $j(1), \ldots, j(m)$, y esto toma un tiempo de proceso p_{ji} para el trabajo j salir de la máquina i. Nuestro objetivo es ordenar el ingreso de trabajos en cada máquina para minimizar el tiempo total de proceso de todos los trabajos.

Casos especiales

¿Podemos simplificar el problema para $k = 1$? (Considere unión). ¿Podemos eliminar el uso de variables binarias?

El Problema

- Para problemas de programación lineal, existe sólo una formulación minimal.
- Existen muchas formulaciones equivalentes (en términos enteros) para el mismo problema.
- La posibilidad de encontrar soluciones óptimas o buenas depende fuertemente de la formulación escogida.
- ¿Cuándo una formulación es buena?

Definiciones básicas

Problemas Enteros

Consideremos un problema definido como

$$\max\{cx : x \in S \subset \mathbb{Z}^n_+\}$$

Decimos que una formulación

$$\max\{cx : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n_+\}$$

es válida si $S = \{x : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n_+\}$.

Formulaciones Ideales

¿Qué es lo mejor que puede pasar?

Si para una formulación valida se tiene que $\mathrm{conv}\{S\} = \{x : Ax \leq b\}$, entonces nuestro problema se reduce a un LP.

Una medida de calidad

Esto sugiere comparar formulaciones en términos de su distancia al ideal, i.e. por el tamaño de $\{x : Ax \leq b\}$.

Un Ejemplo:

Consideremos $S = \{(0000), (1000), (0100), (0010), (0001), (0110), (0101), (0011)\}$, propondremos tres formulaciones y las ordenaremos bajo el criterio anterior.

Formulaciones Ideales

Tres Formulaciones:

$$S = \left\{ x \in \{0,1\}^4 : 93x_1 + 49x_2 + 37x_3 + 29x_4 \leq 111 \right\} \quad (1)$$

$$S = \left\{ x \in \{0,1\}^4 : 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2 \right\} \quad (2)$$

$$S = \left\{ x \in \{0,1\}^4 : \begin{array}{lllll} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq 2 \\ x_1 & +x_2 & & & \leq 1 \\ x_1 & & +x_3 & & \leq 1 \\ x_1 & & & +x_4 & \leq 1 \end{array} \right\} \quad (3)$$

Es fácil ver que (1) contiene estrictamente (2), y que (2) contiene estrictamente (3).

¿Cuál es el estado en general?

- No existe una regla fija.
- El criterio anterior es un buen medidor de la calidad.
- Tener una cantidad de restricciones exponenciales no es un límite necesariamente
  - Debemos ser capaces de identificar restricciones *violadas eficientemente*.
  - Ejemplo: TSP.
- Agregar desigualdades es una de las estrategias estandard (*cutting planes*).

Bibliografía I

Robert E. Bixby, Mary Fenelon, Zonghao Gu, Edward Rothberg, and Roland Wunderling, *MIP: Theory and practice - closing the gap*, Proceedings of the 19th IFIP TC7 Conference on System Modelling and Optimization (Deventer, The Netherlands), Kluwer, B.V., 2000, pp. 19–50.

George B. Dantzig, *Programming in a linear structure*, Comptroller, USAF Washington D.C., 1948.

Bibliografía II

______, *The story about how it began: Some legends, a little about its historical significance, and comments about where its many mathematical programming extensions may be headed*, Elsiever Science Publishers B.V., 1991, pp. 19–31.