MAGCEA Econometria IN709 - Otoño 2008
Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería Industrial
Profesor: Mattia Makovec (mmakovec@dii.uchile.cl)
Auxiliares: Felipe Avilés, Gonzalo Valdés

Clase 12

18/4/08

(Versión preliminar, no difundir)

1. Teoría asintótica: Ley de los Grandes Numeros y Teorema Central del Limite

Para comprobar la normalidad asintótica del estimador de mínimos cuadrados ordinarios, se introducen algunos teoremas estadisticos fondamentales que utlizaremos en la pruebas de los apartados siguientes: la Ley de los Grandes Numeros (de Kinthcin), y del Teorema Central del Limite en las versiones de Lindberg-Levy y de Lindberg-Feller. Esos teoremas se formulan en la versión multivariante que es facilmente aplicable al caso univariante.

1.1. Ley de los Grandes Numeros (Kintchin)

Sea $X_1, X_2.....X_N$ una sucesión de vectores aleatorios independientes y identicamente distribuidos tal que:

$$E(X_k) = \mu \qquad \forall k = 1, 2....N$$

entonces la sucesión de medias muestrales $\bar{X}_1, \bar{X}_2.....\bar{X}_N$ converge en probabilidad a $\mu : \bar{X}_N \xrightarrow{p} \mu$ o:

$$\text{plim}\bar{X}_N = \mu$$

Este resultado es muy importante dado que nos permite determinar un estimador consistente de la media desconocida de una muestra aleatoria sin hacer ningun supuesto sobre la distribución de los vector aleatorios considerados, utilizando unicamente los supuestos que los X_k sean i.i.d. y tengan identica media μ.

1.2. Teorema Central del Limite (Lindberg-Levy)

Sea $X_1, X_2.....X_N$ una sucesión de vectores aleatorios independientes y identicamente distribuidos tal que:

$$\begin{aligned} E(X_k) &= \mu \qquad \forall k = 1, 2....N \\ Var(X_k) &= \Sigma \qquad \forall k = 1, 2....N \end{aligned}$$

entonces la sucesión de medias muestrales $\bar{X}_1, \bar{X}_2.....\bar{X}_N$ converge en distribución a una distribución normal multivariante con media μ y matriz de varianza y covarianza limite Σ :

$$\bar{X}_N \xrightarrow{d} N(\mu, \Sigma)$$

La importancia de este resultado es evidente: podemos establecer que la distribución asintótica de la media muestral de una muestra aleatoria es una distribución normal multivariata con media y varianza respectivamente iguales a la media y a la varianza de cada vector aleatorio de la sucesión, sin necesitar ningun supuesto sobre la distribución de X_k, utilizando unicamente los supuestos que X_k sean i.i.d. y tengan identicas medias μ y varianzas Σ.

1.3. Teorema Central del Limite (Lindberg-Feller)

Esta formulación es diferente respecto a la anterior dado que se relaja el supuesto de igualdad de las varianzas de los vectores aleatorios: sea $X_1, X_2.....X_N$ una sucesión de vectores aleatorios independientes y identicamente distribuidos tal que:

$$\begin{aligned} E(X_k) &= \mu \quad \forall k = 1, 2....N \\ Var(X_k) &= \Sigma_k \quad \forall k = 1, 2....N \end{aligned}$$

Bajo el supuesto adicional:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{N} \Sigma_k}{N} = \Sigma$$

donde Σ es una matriz finita, la sucesión de medias muestrales $\bar{X}_1, \bar{X}_2.....\bar{X}_N$ converge en distribución a una normal multivariante con media μ y matriz de varianza y covarianza limite Σ :

$$\bar{X}_N \xrightarrow{d} N(\mu, \Sigma)$$

2. Normalidad asintótica del estimador de Mínimos cuadrados ordinarios

Se demuestra que, bajo los supuestos usuales H1-H5 y el supuesto adicional $\lim_{N\to\infty} \frac{X'X}{N} = Q$, donde Q es una matriz definida positiva, sin añadir nigun supesto adicional sobre la distribución de los errores, el estimador de mínimos cuadrados ordinarios tiene una distribución asintótica normal. Se considera la definición de $\hat{\beta}_{MCO}$:

$$\hat{\beta}_{MCO} = \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

Multiplicando y dividiendo por N el segundo termino se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{MCO} &= \beta + \left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1}\left(\frac{X'\varepsilon}{N}\right) \\ \hat{\beta}_{MCO} - \beta &= \left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1}\left(\frac{X'\varepsilon}{N}\right) \end{aligned}$$

Ahora multiplicando a la derecha y a la izquierda por $\sqrt{N}$:

$$\sqrt{N}(\hat{\beta}_{MCO} - \beta) = \left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1}\sqrt{N}\left(\frac{X'\varepsilon}{N}\right)$$

La prueba de la normalidad asintótica de $\hat{\beta}_{MCO}$ se basa en dos etapas:

Paso 1: se determina la distribución limite (o asintótica) del termino $\sqrt{N}(\frac{X'\varepsilon}{N})$

Paso 2: se determina la distribución limite del termino $\left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1}\sqrt{N}\left(\frac{X'\varepsilon}{N}\right)$ que, siendo igual a la distribución de $\sqrt{N}(\hat{\beta}_{MCO} - \beta)$, nos permite determinar la distribución asintótica de $\hat{\beta}_{MCO}$.

Paso 1:

Se considera el vector aleatorio $X'\varepsilon$ expresandolo como: $X'\varepsilon = \sum_{i=i}^{N} x_i\varepsilon_i$ (el producto $A'A$ por cualquiera matriz $\underset{(N\times k)}{A}$ se puede escribir como $A'A = \sum_{i=1}^{N} a_i a_i'$, siendo $\underset{(k\times 1)}{a_i}$ un vector columna cuyos k elementos son los elementos de una generica fila i de la matriz original A, con $i = 1, 2....N$; igualmente, el producto $X'X$ se puede escribir como $X'X = \sum_{i=1}^{N} x_i x_i'$ donde el vector $\underset{(k\times 1)}{x_i}$ contiene los k regresores de la fila i en la matriz original X). Se define el vector aleatorio $\underset{(k\times 1)}{w_i} = \underset{(k\times 1)}{x_i}\underset{(1\times 1)}{\varepsilon_i}$ y se comprueba que w_i satisface los supuestos del Teorema Central del Limite en la versión de Lindberg-Feller.

- w_i son i.i.d. dado que los errores ε_i son i.i.d.
- $E(w_i) = E(x_i\varepsilon_i) = x_i\underbrace{E(\varepsilon_i)}_{=0} = x_i0 = 0\ \forall i.$
- $Var(w_i) = E[(w_i - \underbrace{E(w_i)}_{=0})(w_i - \underbrace{E(w_i)}_{=0})'] = E\left[w_i w_i{}'\right] = E[x_i\varepsilon_i\varepsilon_i' x_i'] = x_i\underbrace{E(\varepsilon_i\varepsilon_i')}_{=\sigma^2 I}x_i' = \sigma^2 x_i x_i'\ \forall i.$
- $\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{N}Var(w_i)}{N}$ tiene que ser una matriz finita:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{N}Var(w_i)}{N} = \lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{N}\sigma^2 x_i x_i'}{N} = \sigma^2\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i x_i'}{N} = \sigma^2 Q$$

$$\text{dado el supuesto}\ \lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i x_i'}{N} = \lim_{N\to\infty}\frac{X'X}{N} = Q$$

Dado que se cumplen todo los supuestos del Teorema Central del Limite (Lindberg-Feller), se puede aplicar el teorema al vector aleatorio $w_i = x_i\varepsilon_i$ y derivar la distribución asintótica de la media muestral de $x_i\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{x_i\varepsilon_i}{N}$:

$$\sqrt{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i\varepsilon_i}{N} - \underbrace{E(x_i\varepsilon_i)}_{=0}\right) \xrightarrow{d} N\left(E(x_i\varepsilon_i), \underbrace{\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{N}Var(x_i\varepsilon_i)}{N}}_{=\sigma^2 Q}\right)$$

$$\sqrt{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i\varepsilon_i}{N}\right) \xrightarrow{d} N(0,\sigma^2 Q)$$

$$\sqrt{N}\left(\frac{X'\varepsilon}{N}\right) \xrightarrow{d} N(0,\sigma^2 Q)$$

Paso 2:

Se determina la distribución asintótica de $\left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1}\sqrt{N}\left(\frac{X'\varepsilon}{N}\right)$ utilizando la siguiente propiedad obtenida como implicación del teorema de la función continua en la clase anterior: dada una sucesión de vectores aleatorios i.i.d. $Z_1, Z_2, ...Z_N$, si $Z_N \xrightarrow{d} Z \sim (0,\Sigma)$ y $A_N \xrightarrow{p} A$, siendo A_N una sucesión de matrices aleatorias convergente a la matriz de constantes A, entonces: $A_N Z_N \xrightarrow{d} AZ \sim (0, A\Sigma A')$. En ese caso, dado que por los supuestos iniciales $\left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1} \xrightarrow{p} Q^{-1}$ y dado que $\sqrt{N}\left(\frac{X'\varepsilon}{N}\right) \xrightarrow{d} N(0,\sigma^2 Q)$ por el Paso 1, aplicando la propiedad anterior se obtiene:

$$\left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1}\sqrt{N}\left(\frac{X'\varepsilon}{N}\right) \xrightarrow{d} N(0, Q^{-1}\sigma^2 Q Q^{-1})$$

$$\left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1}\sqrt{N}\left(\frac{X'\varepsilon}{N}\right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 Q^{-1})$$

$$\left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1}\sqrt{N}\left(\frac{X'\varepsilon}{N}\right) = \sqrt{N}(\hat{\beta}_{MCO} - \beta) \xrightarrow{d} N(0,\sigma^2 Q^{-1})$$

$$\hat{\beta}_{MCO} \xrightarrow{d} N\left(\beta, \sigma^2\frac{Q^{-1}}{N}\right)$$

Se observa que, por el supuesto inicial $\lim_{N\to\infty}\left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1} = Q^{-1}$, podemos sustituir el termino Q^{-1} en la expresión de la varianza limite con $\left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1} = N(X'X)^{-1}$ y obtener:

$$\hat{\beta}_{MCO} \xrightarrow{d} N\left(\beta, \sigma^2 \frac{N(X'X)^{-1}}{N}\right)$$
$$\hat{\beta}_{MCO} \xrightarrow{d} N\left(\beta, \sigma^2 (X'X)^{-1}\right)$$

Conclusión: el estimador de mínimos cuadrados ordinarios tiende asintóticamente a una distribución normal multivariante con media β y matriz de varianza-covarianza asintótica $\sigma^2(X'X)^{-1}$, la misma distribución a la cual tendria bajo el supuesto de normalidad de los errores.

3. Consistencia de $\hat{\sigma}^2_{MCO}$

Se demuestra que el estimador de mínimos cuadrados ordinarios de σ^2, $\hat{\sigma}^2_{MCO} = (\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon})/(N-k)$, es un estimador consistente de σ^2, es decir: $\text{plim}\hat{\sigma}^2_{MCO} = \sigma^2$. Re-escribimos $\hat{\sigma}^2_{MCO}$ en forma conveniente:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}^2_{MCO} &= \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{N-k} \\
&= \frac{\varepsilon' M \varepsilon}{N-k} \quad \text{multiplicando y dividiendo por } N \\
&= \frac{N}{N-k}\frac{\varepsilon' M \varepsilon}{N} \quad \text{sustituyendo la definición de } M \\
&= \frac{N}{N-k}\frac{\varepsilon'\left[I - X(X'X)^{-1}X'\right]\varepsilon}{N} \\
&= \frac{N}{N-k}\left[\frac{\varepsilon'\varepsilon}{N} - \left(\frac{\varepsilon' X}{N}\right)\left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1}\left(\frac{X'\varepsilon}{N}\right)\right]
\end{aligned}$$

Ahora consideramos el producto limite de la expresión anterior:

$$\begin{aligned}
p\lim \hat{\sigma}^2_{MCO} &= p\lim \frac{N}{N-k}\left[\frac{\varepsilon'\varepsilon}{N} - \left(\frac{\varepsilon' X}{N}\right)\left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1}\left(\frac{X'\varepsilon}{N}\right)\right] \\
&= p\lim \frac{N}{N-k}\left[p\lim \frac{\varepsilon'\varepsilon}{N} - p\lim\left(\frac{\varepsilon' X}{N}\right) p\lim\left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1} p\lim\left(\frac{X'\varepsilon}{N}\right)\right]
\end{aligned}$$

Resolviendo por cada termino en la expresión se obtiene: $p\lim \frac{N}{N-k} = \lim_{N\to\infty}\frac{N}{N-k} = 1$; $p\lim\left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1} = Q^{-1}$ por los supuestos iniciales; se demuestra que $p\lim\left(\frac{X'\varepsilon}{N}\right) = 0$ utilizando el Teorema de Markov, es decir enseñando que $\frac{X'\varepsilon}{N}$ converge en media cuadratica a 0: $E\left(\frac{X'\varepsilon}{N}\right) = 0$ y $\lim_{N\to\infty} Var\left(\frac{X'\varepsilon}{N}\right) = 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} Var\left(\frac{X'\varepsilon}{N}\right) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} E[(X'\varepsilon - \underbrace{E(X'\varepsilon)}_{=0})(X'\varepsilon - \underbrace{E(X'\varepsilon)}_{=0})'] \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} E\left[(X'\varepsilon)(X'\varepsilon)'\right] \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} E\left[(X'\varepsilon\varepsilon'X)\right] \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} X'E(\varepsilon\varepsilon')X \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{\sigma^2}{N}\left(\frac{X'X}{N}\right) \\
&= \underbrace{\lim_{N\to\infty} \frac{\sigma^2}{N}}_{=0} \underbrace{\lim_{N\to\infty}\left(\frac{X'X}{N}\right)}_{=Q} = 0 \cdot Q = 0
\end{aligned}$$

Entonces se obtiene:

$$\begin{aligned}
p\lim \hat{\sigma}^2_{MCO} &= \underbrace{p\lim \frac{N}{N-k}}_{=1} \left[p\lim \frac{\varepsilon'\varepsilon}{N} - p\lim\left(\frac{\varepsilon'X}{N}\right) \underbrace{p\lim\left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1}}_{=Q^{-1}} \underbrace{p\lim\left(\frac{X'\varepsilon}{N}\right)}_{=0} \right] \\
p\lim \hat{\sigma}^2_{MCO} &= p\lim \frac{\varepsilon'\varepsilon}{N}
\end{aligned}$$

Se utiliza ahora la Ley de los Grandes Numeros para enesñar que $p\lim \frac{\varepsilon'\varepsilon}{N} = \sigma^2$. El producto $\varepsilon'\varepsilon$ se puede expresar como: $\varepsilon'\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2$; entonces $\frac{\varepsilon'\varepsilon}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i^2}{N}$ representa la media muestral de las variables aleatorias ε_i^2, iid, tales que $E(\varepsilon_i^2) = Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 \ \forall i$. Utilizando la Ley de Los Grandes Numeros, podemos determinar que la media muestral de ε_i^2 converge en probabilidad a $E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i^2}{N} \xrightarrow{p} E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$$

Con este resultado se completa la prueba:

$$p\lim \hat{\sigma}^2_{MCO} = p\lim \frac{\varepsilon'\varepsilon}{N} = p\lim \frac{\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i^2}{N} = \sigma^2$$

Conclusión: este resultado nos permite obtener un estimador consistente de la varianza asintótica del estimador de mínimos cuadrados ordinarios, basada en la estimación de σ^2 con su estimador consistente $\hat{\sigma}^2_{MCO}$:

$$\widehat{Var(\hat{\beta}_{MCO})} = \hat{\sigma}^2_{MCO}(X'X)^{-1}$$

$\widehat{Var(\hat{\beta}_{MCO})}$ es un estimador consistente de la varianza asintótica de $\hat{\beta}_{MCO}$ y coincide con el estimador de $Var(\hat{\beta}_{MCO})$ bajo la hipotesis de normalidad de los errores.

4. Test asintóticos

En las secciones anteriores hemos determinado que:

$$\sqrt{N}(\hat{\beta}_{MCO} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 Q^{-1})$$

Podemos utilizar la normalidad asintótica de $\hat{\beta}_{MCO}$ para construir test asintóticos (independientes del supuesto de normalidad de los errores) sobre un conjunto de $q \geq 1$ restricciones lineales. Estamos interesados a realizar tests sobre la usual hipotesis nula bilateral:

$$\begin{aligned} H_0 &: R\beta = r \\ H_1 &: R\beta \neq r \end{aligned}$$

Premultiplicando $\sqrt{N}(\hat{\beta}_{MCO} - \beta)$ por la matriz $\underset{(q\times k)}{R}$ de restricciones lineales y utilizando la propiedades de la distribución normal multivariante se determina la distribución de:

$$\sqrt{N}(R\hat{\beta}_{MCO} - R\beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 RQ^{-1}R')$$

Bajo H_0, $R\beta = r$, sustituyendo $R\beta = r$ en la expresión anterior, se obtiene la distribución asintótica del estimador $\hat{\beta}_{MCO}$ restringido:

$$\sqrt{N}(R\hat{\beta}_{MCO} - r) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 RQ^{-1}R') \quad \text{bajo } H_0 : R\beta = r$$

Consideramos el supuesto habitual: $\lim_{N\to\infty} \left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1} = Q^{-1}$, premultiplicando por R y postmultiplicando por R' la condición es:

$$\lim_{N\to\infty} R\left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1} R' = RQ^{-1}R'$$

Por el teorema de Slutsky, dado que $\text{plim}\hat{\sigma}^2_{MCO} = \sigma^2$, se obtiene:

$$p\lim \hat{\sigma}^2_{MCO} R\left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1} R' = \sigma^2 RQ^{-1}R'$$

Podemos aplicar entonces la propiedad considerada en la clase anterior, segun la cual dada una sucesión de vectores aleatorios iid $Z_1, Z_2, ...Z_N$, si $\underset{(k\times 1)}{Z_N} \xrightarrow{d} Z \sim (0, \underset{(k\times k)}{\Sigma})$ y si $\hat{\Sigma}^{-1}$ es un estimador consistente de Σ, entonces $Z_N'\hat{\Sigma}^{-1}Z_N \xrightarrow{d} \chi^2_{(k)}$, correspondiendo ahora $\sqrt{N}(R\hat{\beta}_{MCO} - r)$ al vector Z_N y $\hat{\sigma}^2_{MCO} R\left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1} R'$ a la matriz $\hat{\Sigma}$:

$$\sqrt{N}(R\hat{\beta}_{MCO} - r)' \left[\hat{\sigma}^2_{MCO} R\left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1} R'\right]^{-1} \sqrt{N}(R\hat{\beta}_{MCO} - r) \xrightarrow{d} \chi^2_{(q)}$$

$$(R\hat{\beta}_{MCO} - r)' \left[\hat{\sigma}^2_{MCO} R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1} (R\hat{\beta}_{MCO} - r) \xrightarrow{d} \chi^2_{(q)}$$

Se observa que el $\left[(R\hat{\beta}_{MCO} - r)' \left[\hat{\sigma}^2_{MCO} R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1} (R\hat{\beta}_{MCO} - r)\right]/q$ es la expresión del test estadistico de $q \geq 1$ restricciones lineales bajo el supuesto de normalidad de los errores; hemos comprobado en las clases anteriores que ese estadistico tiene una distribución exacta $F_{q,N-k}$. Por lo tanto:

$$(R\hat{\beta}_{MCO} - r)' \left[\hat{\sigma}^2_{MCO} R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1} (R\hat{\beta}_{MCO} - r) = qF_{q,N-k} \xrightarrow{d} \chi^2_{(q)}$$

En el caso particular de $q = 1$, el test estadístico que acabamos de obtener tiene una distribución asintótica $N(0,1)$ bajo $H_0 : R\beta = r$:

$$\begin{aligned}
\text{dado que} &: \quad \sqrt{N}(R\hat{\beta}_{MCO} - r) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 RQ^{-1}R') \\
\text{y que} &: \quad \hat{\sigma}^2_{MCO} R \left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1} R' \xrightarrow{p} \sigma^2 RQ^{-1}R' \\
\text{se obtiene} &: \quad \frac{\sqrt{N}(R\hat{\beta}_{MCO} - r)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{MCO} R \left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1} R'}} \xrightarrow{d} N(0,1) \\
& \quad \frac{\sqrt{N}(R\hat{\beta}_{MCO} - r)}{\sqrt{N}\sqrt{\hat{\sigma}^2_{MCO} R \left(X'X\right)^{-1} R'}} \xrightarrow{d} N(0,1) \\
& \quad \frac{(R\hat{\beta}_{MCO} - r)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{MCO} R \left(X'X\right)^{-1} R'}} \xrightarrow{d} N(0,1)
\end{aligned}$$

Conclusión: este resultado implica que, bajo las hipotesis H1-H5 y algunos supuestos adicionales, podemos realizar tests asintóticos sobre la validez de $q \geq 1$ restricciones lineales sin hacer ningun supuesto sobre la distribución de los errores, utilizando como estadistico $qF_{q,N-k}$, siendo $F_{q,N-k}$ el valor del test estadistico obtenido bajo el supuesto de normalidad de los errores, y confrontando este valor con los valores criticos de una distribución $\chi^2_{(q)}$.

Podemos resumir los resultados obtenidos sobre los test de hipotesis *con* y *sin* el supuesto de normalidad de los errores en la tabla siguiente que enseña la distribución de los test estadísticos apropiados bajo diferentes supuestos:

	$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_N)$	**Distribución de ε no especificada**
test de $q \geq 1$ restricciones lineales	$test \sim F_{q,N-k}$	$test \overset{a}{\sim} \chi^2_{(q)}$
test de $q = 1$ restricción lineal	$test \sim t_{N-k}$	$test \overset{a}{\sim} N(0,1)$

En un contexto de estimacion asintótica, una pregunta empirica habitual es cual es el tamaño muestral apropiado para que los resultados teoricos obtenidos cuando $N \to \infty$ sean validos. No existe una respuesta apropiada a esta pregunta, dado que no es posible disponer de una muestra infinita; sin embargo, practicamente se puede establecer que ya una muestra de alrededor 5.000-10.000 observaciones permite a un investigador defender la afirmación que, en el caso de una regresión de mínimos cuadrados ordinarios, el estimador tenga propiedades asintóticas conocidas y que sea posible utilizar test de significatividad asintóticos sin imponer el supuesto de normalidad de los errores.