Macroeconomía I

Universidad de Chile

Auxiliar N^{o}1 : Control Óptimo

10 de Marzo

José DeGregorio

* Esta clase tienen material tomado directamente del libro *Macroeconomía: Teoría y Políticas* De Gregorio (2007). En particular se sigue de cerca el apéndice del capitulo 14.

Outline
Resumen

Outline

- En economía asumimos que la mayoría de las decisiones se hacen a través de un proceso de optimización.

- Aquí se presentan los elementos básicos para resolver problemas de optimización dinámica en tiempo continuo.
- Nos concentramos en las condiciones que deben cumplir las soluciones óptimas, ignorando un trato mas rigurosos de la unicidad o existencia de estos.
- Esta clase auxiliar sigue el capitulo 14 DeGregorio (2006) y Barro Sala-i-Martin (2004). Ambos hacen un muy buen tratamiento de el tema.

Control Óptimo
Idea General

- Considera un sistema económico (o no) el cual se puede controlar su evolución en el tiempo al menos parcialmente via las acciones de un agente.
- En cada minuto del tiempo (t) se puede describir la ubicación del sistema por un vector x_t. Las variables en este vector son llamadas **variables de estado**.
- En cada momento del tiempo, el agente optimizador puede tomar decisiones resumidas por el vector u_t los cuales llamamos **variables de control.**
- En cada momento del tiempo los vectores x_t y u_t determinan el valor de las variables de estado en el siguiente momento del tiempo.

$$\dot{x}_t = g(x_t, u_t) \tag{1}$$

  Donde $g()$ es la **regla de movimiento** el cual potencialmente podría depender del tiempo. Distintas elecciones de u_t llevan a distintas trayectorias del sistema.
- Finalmente tenemos una función objetivo $F(x_t, u_t, t)$ el cual se busca maximizar sobre un intervalo de tiempo determinado.

Control Óptimo
Principio del Máximo

- En cada momento del tiempo, el agente o planificador, debe escoger el valor del vector de **variables de control** u_t, y así determinando un flujo instantáneo de $F_t(x_t, u_t, t)$ y el cambio en las variables de **variables de estado**, $\dot{x}_t$.
- Vemos que las decisiones corrientes tienen dos efectos. Directamente sobre $F()$ y indirectamente via el cambio en la ubicación del sistema dinámico via $\dot{x}_t$.
- Obviamente si el control se escoge de manera de maximizar el flujo $F()$ seria suboptimo. Necesitamos una forma de tomar en cuenta el efecto que tienen las daciones de hoy sobre las del futuro.
- Intuitivamente, el **principio del máximo** logra esto via un precio de sombra para los stocks, o las variables de estado. Estas son llamadas **variables de co-estado** q_t.
- Se modifica la función objetivo para incluir este componente extra y se define el **Hamiltoniano**

$$H_t^c \equiv F(x_t, u_t, t) + q_t \dot{x}_t$$

- Se modifica la función objetivo para incluir este componente extra y se define el **Hamiltoniano**

$$H_t^c \equiv F(x_t, u_t, t) + q_t \dot{x}_t$$

- El primer componente es el flujo instantáneo mientras el segundo componente es el beneficio de la "inversion´´ en las variables de estado.
- Si H^c es diferenciable, sabemos que una condición necesaria sera que

$$\frac{\partial H^c}{\partial u_t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F_t(u_t, x_t)}{\partial u_t} + q_t \frac{\partial g(x_t, u_t)}{\partial u_t} = 0$$

- Es básicamente la misma intuición de un simple problema de Lagrange donde se modifica un problema con restricciones a un problema no restringido introduciendo precios que corrigan los incentivos del agente.
- Esto nos deja el problema de fijar bien los precios de sombra, ya sea la variables de co-estado.

Control Óptimo
Principio del Máximo

- Intuitivamente el valor de las variables de co-estado representan cuando aporta al valor de F() sobre un periodo de tiempo. Es decir, podríamos plantear

$$V_0 \equiv \int_0^T F\big(x_t, u_t, t\big)dt \text{ con } F(t) = e^{-\rho t} f(x_t, u_t)$$

  Por lo que se debería dar que $q_t = \frac{\partial V(x_t, t)}{\partial x_t}$

- Dado que se puede mirar a q_t como una especia de precio de activo, podemos decir que debe cumplir una ecuación de arbitraje simple del tipo

$$\frac{\frac{\partial H^c}{\partial x_t} + \dot{q}_t}{q_t} = \rho$$

- Reordenando la expresión anterior, podemos escribir $\frac{\partial H^c}{\partial x_t} = q_t \rho - \dot{q}_t$ lo que se debe cumplir si q_t esta correctamente escogió.
- Tenemos entonces que son condiciones necesarias en el óptimo que $\frac{\partial H^c}{\partial u_t} = 0$ y $\frac{\partial H^c}{\partial x_t} = q_t \rho - \dot{q}_t$.

Control Óptimo again

Si simplificados el problema a una sola variable de estado k_t y solo una variable de control c_t, el problema a resolver es:

$$\max V_0 \equiv \int_0^T F\left(k_t, c_t, t\right) dt \tag{2}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \dot{k}_t &= g\left(k_t, c_t, t\right) && (3) \\ k_0 &= k(0) && (4) \\ k_T &= k(T) && (5) \end{aligned}$$

Control Óptimo again

La presencia de variables de control y de estado es lo que hace a un problema dinámico esencialmente distinto de un problema estático.

No son una secuencia de problemas estáticos ya que **los períodos están ligados** a través de las decisiones que se toman en cada uno de ellos.

La decisión de c_t afectará al sistema en el futuro, de modo que **no solo afectará retornos corrientes, sino también los retornos futuros**.

¿Como podemos tomar esto en cuenta al escoger c_t?

Se debe notar que la restricción dada por la ecuación 3, $\dot{k}_t$, implica un continuo de restricciones, uno para cada momento $t \in [0, T]$.

Podemos entonces escribir este problema como un Lagrangiano de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = \int_0^T v\left[k_t, c_t, t\right] dt + \eta_T\left[k_T - k(T)\right] + \eta_0\left[k_0 - k(0)\right] + \int_0^T \mu_t\left\{g\left[k_t, c_t, t\right] - \dot{k}_t\right\}$$

$$\mathcal{L} = \int_0^T v\left[k_t, c_t, t\right] dt + \eta_T\left[k_T - k(T)\right] + \eta_0\left[k_0 - k(0)\right] + \int_0^T \mu_t\left\{g\left[k_t, c_t, t\right] - \dot{k}_t\right\}$$

- Donde los η son los multiplicadores de lagrange estático asociados a las restricciones de borde.

- Donde μ_t es el multiplicador de lagrange para cada momento t. Es conocido como el **multiplicador dinámico** o variable **co-estado**.

$$\mathcal{L} = \int_0^T v\left[k_t, c_t, t\right] dt + \eta_T\left[k_T - k(T)\right] + \eta_0\left[k_0 - k(0)\right] + \int_0^T \mu_t\left\{g\left[k_t, c_t, t\right] - \dot{k}_t\right\}$$

- Podríamos maximizar con respecto a c_t y k_t.
- Pero no sabemos como calcular $\frac{\partial \dot{k}}{\partial k}$.
- Podemos usar integración por partes para el termino $\int_0^T \mu_t \dot{k}_t dt$ y de esta manera dejar el $\mathcal{L}$ en términos de solo k_t, c_t.

Lo primero a notar es que:

$$\frac{\partial \mu_t k_t}{\partial t} = \dot{\mu}_t k_t + \mu_t \dot{k}_t$$

Integrando y despejando tenemos

$$\int_0^T -\mu_t \dot{k}_t dt = -\mu_t k_t \Big|_0^T + \int_0^T k_t \dot{\mu}_t dt$$

Lo que nos deja el $\mathcal{L}$ de la siguiente forma:

$$\mathcal{L} = \int_0^T \left\{ v\left[k_t, c_t, t\right] + \mu_t g\left[k_t, c_t, t\right] \right\} dt - k_T \mu_T + k(0)\mu(0) + \int_0^T \dot{\mu}_t k_t dt + \eta_T \left[k_T - k(T \right. \quad (6)$$

- Donde el termino en llaves grandes es el llamado **Hamiltoniano**.
- Encontramos que el problema se reduce a $\mathcal{L} = \int \mathcal{H} +$ algo

Sobre el Hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = v\left[k_t, c_t, t\right] + \mu_t g\left[k_t, c_t, t\right]$$

$\mathcal{H}$ cambia al variar la variable de control c_t por dos motivos:

- El primero es directo a través de la función de utilidad.
- El segundo es indirecto y a través de la ecuación de movimiento, valorado en términos del precio sombre μ_t

Podemos mostrar que las CPO cr c_t y k_t son las siguientes:

$$\mathcal{L} = \int_0^T \Big[\mathcal{H} + \dot{\mu}_t k_t\Big] dt - k_T \mu_T + k(0)\mu(0) + \eta_T \big[k_T - k(T)\big] + \eta_0 \big[k_0 - k(0)\big]$$

$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = 0 \quad \forall t$ es el Principio de Máximo.

$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_t} + \dot{\mu}_t = 0$

$\mu_T = \eta_t \qquad \mu_0 = -\eta_0$

$\eta_T \big[k_T - k(T)\big] = 0$ Condición de Transversalidad

Suponga que la función objetivo es la siguiente:

$$\int_0^T v\big[k_t, c_t, t\big]\, dt = \int_0^T e^{-\rho t} u\big[k_t, c_t\big]\, dt$$

Podemos solucionar este problema con

$$\mathcal{H} = e^{-\rho t} u\big[k_t, c_t\big] + \mu_t g\big(k_t, c_t, t\big)$$

$$\mathcal{H} = e^{-\rho t}\Big\{u\big[k_t, c_t\big] + q_t g\big(k_t, c_t, t\big)\Big\}$$

donde $q_t = e^{\rho t}\mu_t$ y definimos $\widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}e^{\rho t}$ **Hamiltoniano en valor corriente.**

Podemos mostrar que las CPO para este problema son:

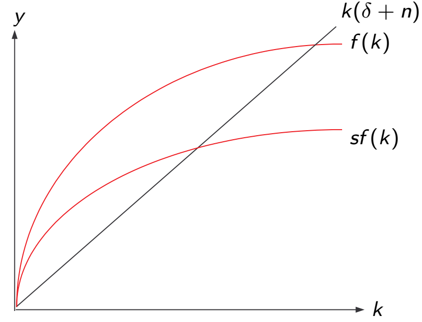
$$\frac{\partial \widehat{\mathcal{H}}}{\partial c_t} = 0$$

$$\frac{\partial \widehat{\mathcal{H}}}{\partial k_t} = \frac{\partial e^{\rho t} H}{\partial k} = e^{\rho t}\dot{\mu} = \rho q - \dot{q}$$

$$e^{-\rho t} q_t (k_t - k_T) = 0$$

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans
Motivación del Problema Dinámico

Ahorro s clave para los resultados del modelo.



Pero fija e exógena al modelo....

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

- Consumo y ahorro se determinan óptimamente por hogares que maximizan intertemporalmente.
- Firmas y hogares interactuar en mercados competitivos.
- Encontramos que el ahorro es función del capital per capita.

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans
Hogares

- La unidad básica es una familia que crece a una tasa n.

  $\Rightarrow$ la población y la fuerza de trabajo crecen a una tasa n: $N_t = N_0 e^{nt}$.
- Cada familia(dinastía) maximiza su función de utilidad intertemporal:

$$U = \int_{t=0}^{\infty} u\left[c_t\right] e^{(n-\rho)t} dt$$

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans
Hogares

- Donde la función $u[c]$ es creciente y cóncava y además cumple con las condiciones de Inada:

$$\lim_{c \to 0} u'[c] = \infty \qquad \lim_{c \to \infty} u'[c] = 0$$

- Cada persona provee una unidad de trabajo(sevicio laboral), a cambio de lo cual recibe un salario w.
- Llamaremos r_t a la tasa de interés real de mercado.
- La restricción presupuestaria que enfrentan las familias en cada período es:

$$w_t N_t + r_t A_t = C_t + \dot{A}_t \tag{7}$$

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans
Hogares

- Dividiendo por N_t, tenemos que la restricción presupuestaría per capita es:

$$\dot{a}_t = w_t + r_t a_t - n a_t - c_t \tag{8}$$

- Se impone la condicion de **No Ponzi** que se cumple con igualad en equilibrio:

$$\lim_{t \to \infty} A_t e^{-rt} = 0 \tag{9}$$

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans
Hogares

- El Hamiltoniano en valor presente es el siguiente:

$$\mathcal{H} = [u(c_t) + \lambda_t(w_t + (r_t - n)a_t - c_t)] \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a} = -\frac{d[\lambda e^{-(\rho-n)t}]}{dt} \tag{12}$$

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans
Hogares

- Esto conduce a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} u'(c) &= \lambda \rightarrow \dot{\lambda} = u''[c]\dot{c} \\ \lambda(r-n) &= -(\dot{\lambda} - (\rho - n)\lambda) \\ u'(c)(r-n) &= -(u''[c]\dot{c} - (\rho - n)u'(c) \end{aligned} \tag{13}$$

- $$\frac{\dot{c}}{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)c}(r-\rho) \tag{14}$$

- $$\lim_{t\rightarrow\infty} \lambda_t a_t e^{-(\rho-n)t} = 0 \tag{15}$$

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans
Hogares

- $$\frac{\dot{c}}{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)c}(r - \rho) \qquad (16)$$

- Con $-\frac{u'(c)}{u''(c)c}$ la elasticidad de sustitución intertemporal $\sigma[c_t]$.

- Ecuación de Euler no entrega la trayectoria optima para el consumo dado r.

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans
Hogares

- La ecuacion de euler encontrada nos dice el crecimiento del consumo pero no el nivel.
- Para el nivel debemos utilizar la ley de movimiento para la riqueza del hogar para derivar la restricción intertemporal y de ese modo fijar el nivel de consumo.
- Integrando

$$\dot{a}_t = w_t + r_t a_t - n a_t - c_t \quad \text{Notando que } \frac{\partial \dot{a} e^{(r-n)t}}{\partial t}$$

- Podemos armar para integrar por partes...

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans
Hogares

- Multiplicando ambos lados por $e^{-(\bar{r}_t-n)t}$ e integrando entre 0 y T, tendremos que la restricción es:
- $$\int_0^T c_t e^{-(r_t-n)t} dt = a_0 + \int_0^T w_t e^{-(r_t-n)t} dt - a_T e^{-(r_t-n)T} \tag{17}$$
- Pero sabemos que de la euler que
$$\frac{\dot{c}}{c} = \sigma(r-\rho) \Rightarrow c_t = c(0)e^{\sigma(r-\rho)t}$$
- Por lo tanto sabemos la trayectoria!

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans
Firmas-Flash

- Se acumula capital de la manera usual:

$$\dot{k} = f(k) - c_t - (n+\delta)k$$

- De la optimización de las firmas se encuentra que

$$f'(k) = r + \delta$$

- Lo que de la función de producción de la economía y dado el capital la tasa de interés queda fijada en

$$r = f'(k) - \delta$$

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans
Equilibrio

- Tenemos dos ecuaciones diferenciales:

1.) $\frac{\dot{c}}{c} = \sigma(f'(k) - \delta - \rho)$

2.) $\dot{k} = f(k) - c_t - (n + \delta)k$

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans
Equilibrio

- $\frac{\dot{c}}{c} = \sigma(f'(k) - \delta - \rho)$

  Si $\dot{c} = 0 \Rightarrow f'(k) = \delta + \rho$ por lo que no depende del consumo. Solo hay un k que satisface esta condición.

  Si el capital es muy alto, la productividad marginal es baja, la tasa de interes es baja y los hogares prefieren una traayectoria decreciente del consumo.

  Si el capital es muy bajo, lo opuesto...

  $\dot{k} = f(k) - c_t - (n + \delta)k$

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans
Equilibrio

Ahora $\dot{k} = f(k) - c_t - (n+\delta)k$ Si $\dot{k} = 0 \Rightarrow f(k) = c_t + (n+\delta)k$.

Derivando esto con respecto al capital tenemos $f'(k) - n - \delta$ Lo cual es la misma dinámica que en el modelo de Solow!

Si el consumo es muy alto, el capital baja.

Si el consumo es muy bajo, lo opuesto...

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans
Diagrama Fase