

IN701
Primer Semestre, 2007
Guía de Problemas 3

Problema 1 En cada uno de los ejercicios siguientes nos referimos a economías de intercambio con 2 consumidores. Encuentre e ilustre, usando cajas de Edgeworth, las preferencias, asignaciones Pareto eficientes y los equilibrios Walrasianos.

- (a) $w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $u_1(x, y) = \frac{1}{2}x + y$, $u_2(x, y) = x + y$.
- (b) $w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_1(x, y) = xy$, $u_2(x, y) = xy$.
- (c) $w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_1(x, y) = 2x + y$, $u_2(x, y) = [x + y]$.
- (d) $w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $u_1(x, y) = y - e^{-x}$, $u_2(x, y) = x + 1 - e^{-y}$.
- (e) $w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_1(x, y) = \min\{2x + y, x + 2y\}$, $u_2(x, y) = xy$.
- (f) $w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u_1(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x) + \frac{1}{2} \ln(y)$, $u_2(x, y) = \min x, y$.
- (g) $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $u_1(x, y) = x^2y$, $u_2(x, y) = xy$.
- (h) $w_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$,
 $(x_1, y_1) \succeq_1 (x_2, y_2) \Leftrightarrow [x_1 + y_1 > x_2 + y_2] \vee [(x_1 + y_1 = x_2 + y_2) \wedge y_1 \geq y_2]$, $u_2(x, y) = y$.

Problema 2 Para cada uno de los ejercicios anteriores verifique si se cumplen los teoremas del bienestar. En caso que no se cumpla alguno, explicita cual hipótesis es la que falla.

Problema 3 Considere una economía de intercambio con L bienes e I consumidores. El consumidor i tiene una función de utilidad $u_i : \mathbb{R}_+^L \rightarrow \mathbb{R}$, continua, creciente y cuasi cóncava.

- (a) Justifique por qué para cualquier dotación inicial $\{w_i\}_{i \in I}$, con $w_i \gg 0 \forall i \in I$, existe una asignación que es Pareto óptima $\{x_i\}_{i \in I}$ tal que $u_i(x_i) \geq u_i(w_i)$, $\forall i$.
Una asignación $\{\hat{x}_i\}_{i \in I}$ se dice *Libre de envidia* si $u_i(\hat{x}_i) \geq u_i(\hat{x}_j)$, para todo $j \neq i$.
- (b) Explique la intuición de esta definición.
- (c) Muestre con un ejemplo que una asignación *Libre de envidia* no es necesariamente Pareto óptima.
- (d) Una asignación se dice *justa* si es Pareto óptima y *Libre de envidia*. Muestre que en esta economía existen asignaciones *justas*.
- (e) Encuentre las asignaciones *justas* de una economía de intercambio donde $u_1(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$, $u_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, y las dotaciones iniciales están dadas por $(1, 6)$ y $(3, 4)$.

Problema 4 Vamos a estudiar una externalidad negativa en el contexto de equilibrio general. Para eso suponga una economía con I bienes, J individuos y K firmas. Suponga que para producir las firmas deben emitir s_k unidades de cierto contaminante, de manera que la función de producción de las firmas es $f^k(y_{1k}, \dots, y_{Jk}, s_k)$, donde y_{ik} es la producción del bien i en esa firma. El problema es que cuando las firmas contaminan, se genera un nivel de $z = \sum_{k \in K} s_k$ que afecta a las personas. Esto se ve reflejado en que la utilidad de un consumidor está dada por $u^j(\vec{x}_j, z)$, decreciente en z . Suponga además que en un principio hay r_i unidades del bien i .

- (a) Suponga que el planificador social maximiza la utilidad de cualquier individuo sujeto a que ningún otro se vea perjudicado y que se cumplan las restricciones asociadas a las funciones de producción y disponibilidad del recurso, obteniendo $(\vec{x}^*, \vec{y}^*, \vec{s}^*)$. Tiene sentido que haga esto? (en particular, se llega a soluciones pareto-óptimo?) Plantee el problema anterior si se preocupa del individuo 1 y escriba las CPO.
- (c) El planificador ha decidido que prefiere dejar que los mercados funcionen, pero como sabe de economía decide cobrarle a cada firma k un impuesto t_k por unidad emitida, encuentre las CPO del equilibrio.
- (d) ¿Qué condiciones se deben cumplir para que el equilibrio cumpla las condiciones de (a)? Encuentre los impuestos óptimos. Si $z = \sum_{k \in K} a_k s_k$, ¿cómo cambia su respuesta?

Problema 5 Considere una economía con tres bienes, Tierra, Peras y Manzana (T, P, M), dos consumidores y dos firmas. La firma x es del consumidor 1 y produce a lo ms tres unidades de M por cada undiad de T . La firmas y produce cuatro unidades de P por unidad de T . Inicialmente cada consumidor tiene 5 unidades de T . Por último, $u_1(P, M) = 6 + 0.4\ln(P) + 0.6\ln(M)$ y $u_2(P, M) = 8 + \ln(P) + \ln(M)$.

- (a) Asumiendo que las firmas y los individuos son tomadores de precio y las firmas maximizan utilidad encuentre el equilibrio general. ¿Cuál sería el equilibrio si se invierte la propiedad de las empresas? ¿y si cada consumidor tuviese la mitad de cada una?
- (b) ¿Cuál es el conjunto Pareto-eficiente?

Problema 6 Considere una economía de intercambio con un continuo de consumidores. La unidad de medida de estos consumidores está distribuída uniformemente en el intervalo $[1, 2]$. El consumidor j tiene utilidad dada por $U_j = x + jy$ y dotación inicial $E_j = \left(\frac{1}{(1+j)^2}, \frac{1}{(1+j)^2} \right)$. Encuentre el equilibrio general.

Problema 7 Suponga que tres bienes son producidos utilizando 4 factores de producción, x_j , $j = 0, 1, 2, 3$, con x_0 denotando el trabajo. Las funciones de costo para los tres bienes están dadas por:

$$\begin{aligned} c_1(p, x_1) &= \frac{x_1}{2}(p_0 + p_1 + p_2 + p_3), \\ c_2(p, x_2) &= x_2 \sqrt[3]{p_0 p_1 p_2}, \\ c_3(p, x_3) &= x_3 \left(\sqrt[3]{p_0 p_1 p_2} + \frac{p_3}{2} \right). \end{aligned}$$

Calcular el equilibrio general si existe sólo un consumidor con función de utilidad

$$u(x) = x_1 + \sqrt{x_2} + \sqrt[3]{x_3} + \sqrt[4]{1 - x_0}$$

Problema 8 Encuentre un equilibrio walrasiano de la siguiente economía: $u_1(x_1, x_2, x_3) = \min x_1, x_2$, $u_2(x_1, x_2, x_3) = \min x_2, x_3$, $u_3(x_1, x_2, x_3) = \min x_1, x_3$, dotaciones iniciales $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.