



## Teoría de Carteras Revisitada

Otoño 2008

J. Miguel Cruz

### Fijando el horizonte de análisis, nos concentramos en N activos riesgosos

- Variable aleatoria es el retorno entre t y t+1 de los diferentes activos:

$$\tilde{\mathbf{R}} \rightarrow N(\mathbf{R}_e, \Sigma)$$

donde  $R_e$  es el vector de retornos esperados y  $\Sigma$  es la matriz varianza covarianza.

El vector de retornos aleatorios se define como:

$$[\tilde{\mathbf{R}}]_i = \tilde{r}_i = \ln\left(\frac{\tilde{P}_{i,t+1}}{P_{i,t}}\right)$$

con  $[\mathbf{R}_e]_i = E(\tilde{r}_i)$ , y  $[\Sigma]_{ij} = \text{cov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_j)$

## Definimos una cartera o portafolio como una selección de activos

- Una cartera es un vector  $w$  de porcentajes invertidos en cada uno de los activos

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{w}^T \cdot \bar{\mathbf{1}} = \sum_1^N w_i = 1$$

- La cartera tiene un retorno esperado  $r$ :

$$\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{R}_e = \sum_1^N w_i \cdot \bar{r}_i = r$$

- y una varianza  $\sigma^2$ :

$$\mathbf{w}^T \cdot \Sigma \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{ij} = \sigma^2$$

## Volatilidad de una cartera

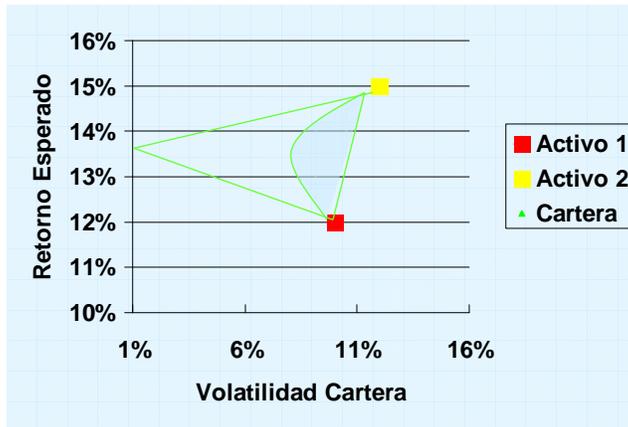
- Habíamos visto que para una cartera, la volatilidad es

$$\sigma_C = \sqrt{w^2 \cdot \sigma_1^2 + (1-w)^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot w \cdot (1-w) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho}$$

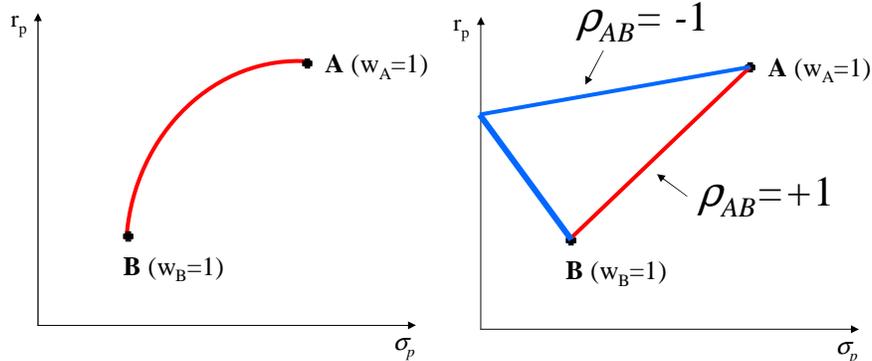
- Si volatilidad del activo 1 es 10% y del activo 2 es 12%, y su correlación es -0.5 entonces

Fracción $w$	Vol Cartera
0.0	12.0%
0.5	5.6%
1.0	10.0%

## Graficando Retorno y Riesgo para una cartera



## Carteras posibles con 2 activos



- Instrumentos con correlación positiva moderada

- Correlación perfecta (positiva y negativa)

## Diversificación de riesgos

- Una adecuada selección del peso en cada uno de los activos permite una disminución del riesgo de la cartera.
- Un menor riesgo implica siempre una mayor rentabilidad?
- Es posible encontrar una cartera con riesgo cero?
- Qué pasa para más de dos activos?

## Varianza de un portafolio de N instrumentos

- Varianza del Portafolio:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij}$$

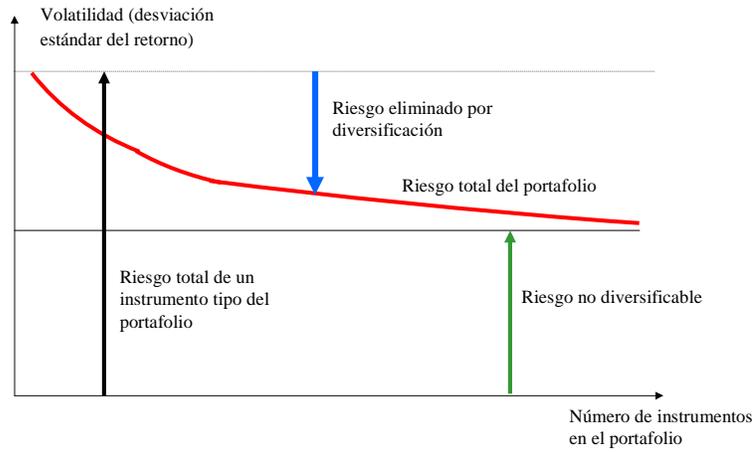
- Supongamos que el peso de cada instrumento es igual a  $1/N$
- En la varianza del portafolio, existen  $N$  varianzas ponderadas por  $1/N$  y  $N^2 - N$  covarianzas. Podemos decir entonces que la varianza del portafolio es:

$$\text{Varianza} = N \left( \frac{1}{N} \right)^2 (\text{varianza promedio}) + (N^2 - N) \left( \frac{1}{N} \right)^2 (\text{covarianza promedio})$$

$$\text{Varianza} = \frac{1}{N} (\text{varianza promedio}) + \left( 1 - \frac{1}{N} \right) (\text{covarianza promedio})$$

- Si  $N$  es muy grande, la varianza del portafolio tiende a la covarianza promedio de los instrumentos.

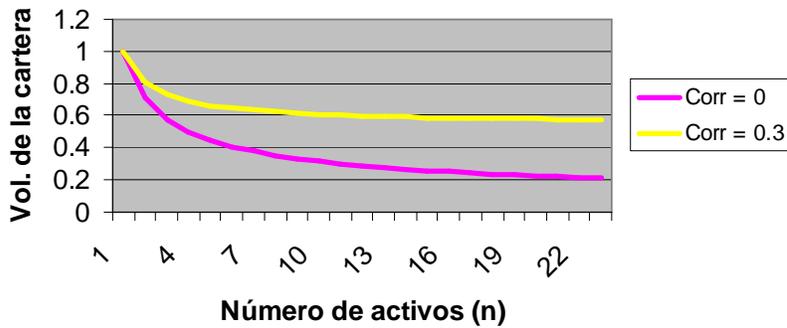
**La varianza del portafolio descenderá hasta un nivel donde no será posible reducir más su varianza.**



**Diversificación depende de la correlación**

**Diversificación para n activos**

(Varianzas iguales a 1.0, misma correlación entre activos)



## Frontera de mínima varianza de Carteras

Podemos resolver el siguiente problema

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{w}}{\text{Min}} \quad & \frac{1}{2} \sigma_c = \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{w}^T \cdot \Sigma \cdot \mathbf{w}} \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{w}^T \cdot \vec{\mathbf{1}} = 1 \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{R}_e = r \end{aligned}$$

## Condiciones necesarias y suficientes para carteras en la frontera de mínima varianza

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \cdot w_j - \lambda \cdot \bar{r}_i - \mu = 0 \quad \text{para } i = 1 \dots N$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \cdot \bar{r}_i = r$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

## Teorema de dos fondos

Matricialmente,  
la solución para  $w$   
se despeja de

$$\Sigma \cdot w - \lambda \mathbf{R}_e - \mu \vec{\mathbf{1}} = \mathbf{0}$$

$$w^T \cdot \mathbf{R}_e = r$$

$$w^T \cdot \vec{\mathbf{1}} = 1$$

Solución es de la forma,

$$w^* = g + hr$$

Con  $g$  y  $h$  vectores que dependen de la matriz varianza covarianza  
y el vector de retornos esperados

## Vectores $g$ y $h$ :

Si definimos

$$a = \vec{\mathbf{1}} \Sigma^{-1} \mathbf{R}_e$$

$$b = \mathbf{R}_e^T \Sigma^{-1} \mathbf{R}_e$$

$$c = \vec{\mathbf{1}}^T \Sigma^{-1} \vec{\mathbf{1}}$$

$$d = b \cdot c - a^2$$

Entonces,

$$g = \frac{1}{d} [b \cdot \Sigma^{-1} \vec{\mathbf{1}} - a \cdot \Sigma^{-1} \mathbf{R}_e]$$

$$h = \frac{1}{d} [c \cdot \Sigma^{-1} \mathbf{R}_e - a \cdot \Sigma^{-1} \vec{\mathbf{1}}]$$

## Teorema de dos fondos

Si  $w_1$ , y  $w_2$  son dos soluciones conocidas del problema para  $r$  distintos, entonces

$$w_3 = \alpha w_1 + (1 - \alpha) w_2$$

es también una solución para  $r_3 = \alpha r_1 + (1 - \alpha) r_2$ .

Es decir, para construir toda la frontera de mínima varianza bastan dos carteras diferentes que pertenezcan a la frontera.

## Relación entre el retorno esperado y la varianza de las carteras de la frontera

- Para la cartera de la frontera de mínima varianza tenemos que

$$\sigma^2 = \mathbf{w}^T \cdot \Sigma \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{g} + \mathbf{h}r)^T \cdot \Sigma \cdot (\mathbf{g} + \mathbf{h}r)$$

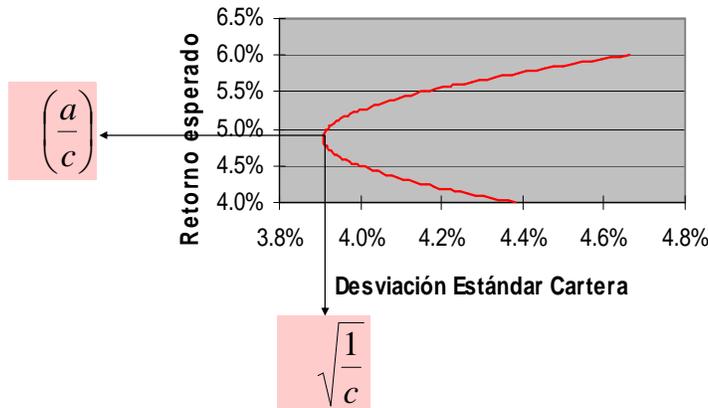
- Lo que equivale a

$$\sigma^2 = \left( \frac{1}{d} \right) \cdot [c \cdot r^2 - 2 \cdot a \cdot r + b]$$

## Carteras de mínima varianza definen una parábola en el espacio $r-\sigma^2$

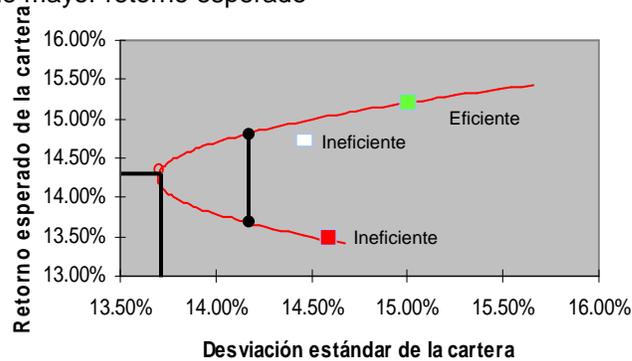
### Frontera Mínima Varianza

Caso  $r_1=4\%$ ,  $r_2=6\%$   $\sigma_1=3.0\%$ ,  $\sigma_2=3.4\%$ ,  $r_o=50\%$



## Concepto de frontera eficiente de carteras

Agentes prefieren al mismo nivel de volatilidad carteras de mayor retorno esperado



## Proposiciones

- Prop1: Covarianza entre un portfolio p de la frontera de mínima varianza, y el portfolio de mínima varianza mv es igual a la varianza de éste último.

$$\text{COV}(\tilde{r}_p, \tilde{r}_{mv}) = \sigma_{mv}^2 = \left(\frac{1}{c}\right)$$

- Prop2: Para todo portfolio p en la frontera de mínima varianza, excepto para el portfolio mv, existe un portfolio q único en la frontera tal que la covarianza entre p y q sea cero. (llamaremos a q zc(p))

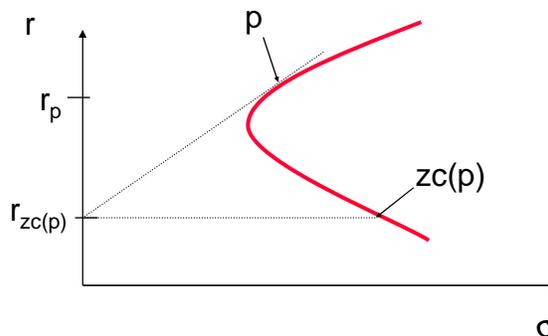
$$\text{COV}(\tilde{r}_p, \tilde{r}_{zc(p)}) = 0 = \mathbf{w}_p^T \Sigma \mathbf{w}_{zc(p)}$$

- y se da que

$$r_{zc(p)} = \frac{a}{c} - \frac{d/c^2}{r_p - a/c}$$

## Si portfolio p es eficiente, entonces zc(p) no lo es

- Además, se puede mostrar que p y zc(p) son tales que:



## Finalmente podemos mostrar CAPM sin activo libre de riesgo

- Si p es un portfolio de la frontera otro que el mv, y q es cualquier portfolio (en particular un activo individual), entonces,

$$\text{COV}(\tilde{r}_p, \tilde{r}_q) = \mathbf{w}_p^T \Sigma \mathbf{w}_q = \lambda r_q + \mu$$

- Luego podemos escribir que

$$r_q = (1 - \beta_{qp}) \cdot r_{zc(p)} + \beta_{qp} \cdot r_p$$

- Definiendo a

$$\beta_{qp} = \frac{\text{COV}(\tilde{r}_p, \tilde{r}_q)}{\sigma_p^2}$$

## El retorno de la cartera q se puede descomponer en riesgo sistemático y riesgo específico:

- El retorno aleatorio se puede descomponer entonces como:

$$\tilde{r}_q = (1 - \beta_{qp}) \cdot \tilde{r}_{zc(p)} + \beta_{qp} \cdot \tilde{r}_p + \tilde{\mathcal{E}}_q$$

- con

$$\text{COV}(\tilde{r}_p, \tilde{r}_{zc(p)}) = 0$$

$$\text{COV}(\tilde{r}_p, \tilde{\mathcal{E}}_q) = 0$$

$$\text{COV}(\tilde{r}_{zc(p)}, \tilde{\mathcal{E}}_q) = 0$$