

Pauta Control N° 1 – Preg. 3

- a) (1.0 ptos.) Considere un Análisis Discriminante donde las primeras dos variables discriminantes Z_1 y Z_2 tienen las características siguientes:

Orden	η_m^2	Λ_{3-m}	F	Nivel de Sig.
1	0.763	0.219	10.98	0.0001
2	0.075	0.925	1.22	0.3089

Comente acerca del poder discriminante del plano (Z_1, Z_2).

Solución:

Se observa que el poder discriminante de Z_1 (0.763) es mucho mayor que el de Z_2 (0.075), el cual resulta estadísticamente no significativo. Luego, debido a que ésta segunda variable no entrega información adicional significativa al análisis, el plano (Z_1, Z_2) no tiene gran poder discriminante (basta considerar el primer eje, asociado a Z_1 , como un índice provisional de la variable cualitativa que define las clases en el análisis). Pero el plano puede ser usado con fines descriptivos, por ejemplo para visualizar la regla de asignación construida por un análisis discriminante bayesiano.

- b) (1.0 ptos.) Considere el modelo factorial con variables estandarizadas

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{AF} + \mathbf{U} \\ \mathbf{R} &= \mathbf{AA}' + \mathbf{\Phi} \end{aligned}$$

En análisis de componentes principales para calcular este modelo, se obtienen un conjunto de ejes $\Delta_1, \dots, \Delta_p$ engendrados por los vectores propios ortonormales $u_1, \dots, u_p$, asociados a los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (ordenados en orden decreciente) de la matriz de correlaciones $\mathbf{R}$. Pruebe que las componentes principales

$$Y_{hi} = \sum_{j=1}^p u_{hj} x_{ij} \quad (*)$$

tienen varianza λ_h y no están correlacionadas entre sí.

Solución:

Notemos que las componentes principales son p vectores Y_h , en cada uno de los cuales la coordenada i -ésima está definida por (*), $h = 1, \dots, p$.

Consideremos la varianza de las componentes principales:

$$Var(Y_h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_{hi} - \bar{Y}_h)^2$$

como las variables $X_j, j = 1, \dots, p$ están estandarizadas, es fácil ver que $\bar{Y}_h = 0, \forall h$. Así, se tiene que

$$Var(Y_h) = \frac{1}{n} (Y_h' Y_h)$$

Pero $Y_h = X u_h$, con lo cual

$$Var(Y_h) = \frac{1}{n} (u_h' X' X u_h)$$

como las variables $X_j, j = 1, \dots, p$ están estandarizadas, $\frac{1}{n} X' X = R$ y además se dice que $Ru_h = \lambda_h u_h$.

Con ello,

$$Var(Y_h) = (u_h' \lambda_h u_h) = \lambda_h u_h' u_h = \lambda_h$$

ya que los u_h son ortonormales ($u_h' u_h = 1$).

Considerando que $Corr(Y_h, Y_l) = \frac{COV(Y_h, Y_l)}{\sqrt{Var(Y_h)Var(Y_l)}}$ y probando que $COV(Y_h, Y_l) = u_h' R u_l, \forall h, l$

se tiene que la correlación es nula por ortonormalidad de los u_h .