IN51a

Aux extra

1. Busquemos las estrategias mixtas para la caja del problema 1 a. Para el jugador 1 se tiene que la utilidad es:

$$U_1(p,q,r,s) = p(r-2s) + q(s-2r) + (1-p-q)(1-r-s)$$

De donde la mejor respuesta de 1 queda dada por:

$$(p^*, q^*, 1-p^*-q^*) = \begin{cases} \text{(1,0,0)}, & r > s, 2r-s > 1 \\ \text{(0,1,0)}, & s > r, 2s-r > 1 \\ \text{(0,0,1)}, & 2r-s < 1, 2s-r < 1 \\ \text{(x,0,1-x)}, & 2r-s = 1, r > s \\ \text{(0,x,1-x)}, & 2s-r = 1, s > r \end{cases}$$

Dond x es cualquier número entre cero y uno.

Ahora, para 2:

$$U_2(s,r,q,p) = s(q-2p) + r(p-2q) + (1-s-r)(1-q-p)$$

De donde la mejor respuesta de 1 queda dada por:

$$(r^*, s^*, 1-s^*-r^*) = \begin{cases} \text{(1,0,0)}, & q > p, 2q-p > 1 \\ \text{(0,1,0)}, & p > q, 2p-q > 1 \\ \text{(0,0,1)}, & 2q-p < 1, 2p-q < 1 \\ \text{(x,0,1-x)}, & 2q-p = 1, q > p \\ \text{(0,x,1-x)}, & 2p-q = 1, p > q \end{cases}$$

Ahora, como el único equilibrio en estrategias puras fue encontrado en la aux, sólo buscamos lo eqs en mixtas.

Supongamos que 1 juega $(x, 0, 1-x)$. Eso significa que $2r - s = 1$ y $r > s$. Si uno juega así, entonces $p > q$, por lo que dos puede jugar $(0, 1, 0)$ o $(0, x, 1-x)$. En caso de que juegue la primera opción entonces $2r - s \neq 1$, por lo que no hay equilibrio. En caso de que juegue la segunda, tampoco se cumple la condición, por lo que no puede haber un equilibrio con uno jugando esa estrategia.

Supongamos ahora que 1 juega $(0, x, 1-x)$. Eso significa que $q > p$. Luego dos juega $(x, 0, 1-x)$ o $(1, 0, 0)$, y ninguna de las dos cumple con las condiciones para que la mejor respuesta de 1 sea esa, pues los dos tienen $r > s$.

Para el jugador dos es similar el procedimiento. Luego no existen equilibrios en estrategias mixtas.

2. Duopolio de Stackelberg:

   Veamos el SPE. La firma dos busca maximizar su utilidad dada la producción de la firma uno, esto es:

   $$max_{q_2} q_2(P(Q)-c) = q_2(a-q_1-q_2-c)$$

   La condición de primer orden queda:

   $$q_2^*(q_1) = \frac{a-c-q_1}{2}$$

   Ahora, la firma 1 maximiza sus utilidades sabiendo que 2 maximiza, es decir, resuelve:

   $$max_{q_1} q_1(P(Q)-c) = q_1(a-q_1-q_2^*(q_1)-c) = q_1\frac{a-c-q_1}{2}$$

   Derivando e igualando a cero queda:

   $$q_1^* = \frac{a-c}{2}$$

   Luego, el SPE del juego queda:

   $$SPE = (q_1^* = \frac{a-c}{2}; q_2^*(q_1) = \frac{a-c-q_1}{2})$$

   Hay que notar que en el SPE hay que poner las estrategias de los jugadores, NO las realizaciones.

3. Veamos el problema del "rotten Kid":
   La estrategia del hijo es la acción A, la estrategia del padres es una función $B(I_h(A), I_p(A))$. Dado esto, para encontrar el SPE hay que ir de atrás hacia adelante. Es decir, primero veamos lo que hace el padre. Dada una acción A, el padre busca el B^* que maximiza su utilidad.

   $$max_b V(I_p - B) + kU(I_h + B)$$

   Derivando y igualando a cero, la condición que queda es:

   $$V'(I_p - B^*) + kU'(I_h + B^*) = 0$$

   La función de reacción B depende implícitamente de $I_h(A)$ y $I_p(A)$, que es lo que observa el padre.

   Ahora, para calcular el SPE es necesario ver lo que hace el hijo, el maximiza su utilidad, asumiendo que el padre juega B^*:

$$max_A U(I_h(A) + B^*(I_h, I_p))$$

Las condiciones de primero orden quedan:

$$U'(I_h + B^*(I_p, I_h))(I'_h + \frac{\partial B^*}{\partial I_h} I'_h + \frac{\partial B^*}{\partial I_p} I'_p) = 0$$

Todo está evaluado en A^*. De la última relación, como $U(.)$ es creciente entonces la derivada es estrictamente mayor que cero. Luego la igualdad que tenemos es:

$$I'_h + \frac{\partial B^*}{\partial I_h} I'_h + \frac{\partial B^*}{\partial I_p} I'_p = 0$$

Ahora veamos la primera ecuación. Si derivamos con respecto a A en esa ecuación, nos queda el siguiente resultado:

$$V''(I_p - B^*)(I'_p - \frac{\partial B^*}{\partial I_h} I'_h - \frac{\partial B^*}{\partial I_p} I'_p) + kU''(I_h + B^*)(I'_h + \frac{\partial B^*}{\partial I_h} I'_h + \frac{\partial B^*}{\partial I_p} I'_p) = 0$$

Evaluando en A^* y aplicando el resultado anterior queda que:

$$V''(I_p(A^*) - B^*(I_p(A^*), I_h(A^*))(I'_p(A^*) + I'_h(A^*)) = 0$$

Y como $V(.)$ es estrictamente concava, queda que:

$$I'_p(A^*) + I'_h(A^*) = 0$$

Luego el A^* que elige el niño es el mismo que maximiza la suma de los ingresos familiares.

Hay que notar que el SPE del juego es:

$$SPE = (A^*, B^*(I_p(A^*), I_h(A^*)))$$

Propuesto: verificar condiciones de segundo orden, ie. que A^* y B^* maximizan.