IN51a

Aux extra

1. Duopolio de Stackelberg:

   Veamos el SPE. La firma dos busca maximizar su utilidad dada la producción de la firma uno, esto es:

   $$max_{q_2} q_2(P(Q) - c) = q_2(a - q_1 - q_2 - c)$$

   La condición de primer orden queda:

   $$q_2^*(q_1) = \tfrac{a-c-q_1}{2}$$

   Ahora, la firma 1 maximiza sus utilidades sabiendo que 2 maximiza, es decir, resuelve:

   $$max_{q_1} q_1(P(Q) - c) = q_1(a - q_1 - q_2^*(q_1) - c) = q_1 \tfrac{a-c-q_1}{2}$$

   Derivando e igualando a cero queda:

   $$q_1^* = \tfrac{a-c}{2}$$

   Luego, el SPE del juego queda:

   $$SPE = (q_1^* = \tfrac{a-c}{2}; q_2^*(q_1) = \tfrac{a-c-q_1}{2})$$

   Hay que notar que en el SPE hay que poner las estrategias de los jugadores, NO las realizaciones.

2. Veamos el problema del "rotten Kid":
   La estrategia del hijo es la acción A, la estrategia del padres es una función $B(I_h(A), I_p(A))$. Dado esto, para encontrar el SPE hay que ir de atrás hacia adelante. Es decir, primero veamos lo que hace el padre. Dada una acción A, el padre busca el B^* que maximiza su utilidad.

   $$max_b V(I_p - B) + kU(I_h + B)$$

   Derivando y igualando a cero, la condición que queda es:

   $$V'(I_p - B^*) + kU'(I_h + B^*) = 0$$

La función de reacción B depende implícitamente de $I_h(A)$ y $I_p(A)$, que es lo que observa el padre.

Ahora, para calcular el SPE es necesario ver lo que hace el hijo, el maximiza su utilidad, asumiendo que el padre juega B^*:

$$max_A U(I_h(A) + B^*(I_h, I_p))$$

Las condiciones de primero orden quedan:

$$U'(I_h + B^*(I_p, I_h))(I_h' + \frac{\partial B^*}{\partial I_h} I_h' + \frac{\partial B^*}{\partial I_p} I_p') = 0$$

Todo está evaluado en A^*. De la última relación, como $U(.)$ es creciente entonces la derivada es estrictamente mayor que cero. Luego la igualdad que tenemos es:

$$I_h' + \frac{\partial B^*}{\partial I_h} I_h' + \frac{\partial B^*}{\partial I_p} I_p' = 0$$

Ahora veamos la primera ecuación. Si derivamos con respecto a A en esa ecuación, nos queda el siguiente resultado:

$$V''(I_p - B^*)(I_p' - \frac{\partial B^*}{\partial I_h} I_h' - \frac{\partial B^*}{\partial I_p} I_p') + kU''(I_h + B^*)(I_h' + \frac{\partial B^*}{\partial I_h} I_h' + \frac{\partial B^*}{\partial I_p} I_p') = 0$$

Evaluando en A^* y aplicando el resultado anterior queda que:

$$V''(I_p(A^*) - B^*(I_p(A^*), I_h(A^*))(I_p'(A^*) + I_h'(A^*)) = 0$$

Y como $V(.)$ es estrictamente concava, queda que:

$$I_p'(A^*) + I_h'(A^*) = 0$$

Luego el A^* que elige el niño es el mismo que maximiza la suma de los ingresos familiares. Hay que notar que el SPE del juego es:

$$SPE = (A^*, B^*(I_p(A^*), I_h(A^*)))$$

Propuesto: verificar condiciones de segundo orden, ie. que A^* y B^* maximizan.