INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN51A
Profesores: Ronald Fischer – Nicolás Figueroa
Auxiliares: Diego Vega San Martín – Jorge Vásquez
Jorge Catepillán

Auxiliar Nº 1

1. Demuestre rigurosamente que un equilibrio en estrategias dominantes es un equilibrio de Nash.

R: Consideremos $S^* = (S_1^*,...,S_N^*)$ como un equilibrio en estrategias dominantes

Luego, se cumple: $U_i(S_i^*, S_{-i}) \geq U_i(S_i, S_{-i})\ \forall S_i\ \ \forall S_{-i}\ \ \forall i$, con desigualdad estricta para al menos algún S_i .

En particular, $U_i(S_i^*, S_{-i}^*) \geq U_i(S_i, S_{-i}^*)\ \forall S_i\ \ \forall i$ entonces, vemos que se cumple la definición de E.N y, por lo tanto, queda demostrado que un equilibrio en estrategias dominantes será un EN.

2. Considere el juego:

		Jugador 2		
Jugador 1		Izquierda	Centro	Derecha
	Alta	1,0	1,2	0,1
	Baja	0,3	0,1	2,0

Encuentre el equilibrio del juego a través de eliminación iterativa de estrategias **estrictamente** dominadas.

R: Pata el jugador 1, ni alta ni baja están dominadas: alta es mejor si 2 elige izquierda, pero baja es mejor si 2 elige derecha. En cambio, para el jugador 2, derecha está estrictamente dominada por centro, por lo que un jugador racional 2 no elegirá derecha. Así, si el jugador 1 sabe que el jugador 2 es racional, puede eliminar derecha del espacio de estrategias posibles del jugador 2. Esto es, si el jugador 1 sabe que el jugador 2 es racional, puede comportarse como si se encontrase en el siguiente juego:

		Jugador 2	
		Izquierda	Centro
Jugador 1	Alta	1,0	1,2
	Baja	0,3	0,1

En este caso baja está estrictamente dominada por alta para el jugador 1, así que si el jugador 1 es racional (y el jugador 1 sabe que el jugador 2 es racional, por lo que se aplica el juego anterior) no elegirá baja. Por eso, si el jugador 2 sabe que el jugador 1 es racional, y el jugador 2 sabe que el jugador 1 sabe que el jugador 2 es racional, el jugador 2 puede eliminar baja del espacio de estrategias del jugador 1, quedando el juego:

		Jugador 2	
		Izquierda	Centro
Jugador 1	Alta	1,0	1,2

Pero ahora, izquierda está estrictamente dominada por centro para el jugador 2, quedando (alta, centro) como el resultado del juego.

3. Considere el siguiente juego de ubicación geográfica

Firma 2

Firma1

	Norte	Centro	Sur
Norte	-2, 3	2, 4	0,-1
Centro	-3, 1	-2, 4	0, 0
Sur	-2, 2	-2,-1	0, 0

a) Encuentre todas las estrategias dominantes.
b) Encuentre todas las estrategias dominadas.
c) Encuentre todos los equilibrios de Nash en estrategias puras.

R: a) Firma 1

- Norte es una estrategia dominante (no en forma estricta)
    i. Norte domina débilmente a Centro
    ii. Norte domina débilmente a Sur.

Firma 2

- No posee estrategias dominantes

b) Firma 1

- Centro es una estrategia dominada (no en forma estricta)
    i. Centro es débilmente dominada por Norte
    ii. Centro es débilmente dominada por Sur
- Sur es débilmente dominada por Norte

Firma 2

- Sur es una estrategia estrictamente dominada por Norte

c) Los equilibrios de Nash son:

E1 = (S1*, S2*) = (Norte, Centro)

E2 = (S1*, S2*) = (Sur, Norte)

4. Un monopolio natural es una industria en que las condiciones tecnológicas o de demanda son tales que es eficiente que sólo produzca una firma. Una industria se puede transformar en un monopolio natural por una caída violenta de la demanda. Por ejemplo, cuando terminó la guerra fría la demanda por armamentos cayó y varias firmas salieron del mercado. En esta pregunta se le pide determinar en qué momento salen las firmas del mercado cuando una industria pasa a ser monopolio natural, pero inicialmente hay más de una firma en el mercado.
Considere un duopolio que permanecerá por dos años más y que cada firma pierde C por año. Si una de las firmas saliera del mercado, entonces la restante tendría ingresos

iguales a I por período (I>C), por lo que quede de los dos años. Cada firma puede elegir cuando salir: ahora (t=0), en un año (t=1) o en dos años más (t=2).

a) Escriba el juego en forma normal.
b) Encuentre el (o los) equilibrio (s) de Nash en estrategias puras. Si una de las firmas decide salir, ¿en qué momento lo hace en equilibrio?

R: a) Jugadores: Firma 1 y Firma 2.
Estrategias: Salir en t=0, t=1, t=2
Las utilidades se describen en la siguiente matriz de pagos:

Firma 1 \ Firma 2	t=0	t=1	t=2
t=0	0 0	Π 0	2Π 0
t=1	0 Π	-C -C	Π-C -C
t=2	0 2Π	-C Π-C	-2C -2C

b) Los Equilibrios de Nash en estrategias puras son:
EN1 = (Salir en t=0, Salir en t=2)
EN2 = (Salir en t=2, Salir en t=0)
Esto es, si una firma decide salir lo hace en el primer período o se queda hasta el final (t=2).

5. Considere el juego de la inspección. En él, un trabajador puede elegir entre trabajar (T) y no hacerlo (NT). El costo del esfuerzo para el agente es g=2. El empleador utiliza al empleado para producir un bien con valor v=4, el que sólo se produce si el trabajador trabaja. El empleador puede realizar una inspección (I) o no hacerlo (NI). El costo de la inspección es h=1 y determina si se le debe pagar al empleado. El empleador le paga un salario w=3, a menos que tenga evidencia (mediante una inspección) de que el trabajador no trabajó, en cuyo caso lo despide y le paga 0.

a) encuentre la forma normal del juego.
b) Muestre que no hay equilibrios de Nash en estrategias puras.

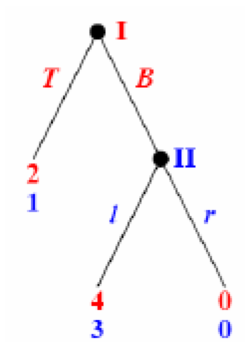
R: a) Jugadores: empleador y empleado.
Estrategias: - empleador: I o NI.
- empleado: T o NT.
Pagos:

Empleado \ Empleador	I	NI
T	4-3-1=0 3-2=1	1 1
NT	-1 0	-3 3

b) para ver esto, podemos marcar los pagos sobre la matriz y ver que no coinciden como los escogidos todos los pagos de una celda al mismo tiempo en ninguna celda. Con ello se muestra que no hay EN en estrategias puras:

		Empleador	
		I	NI
Empleado	T	4-3-1=0 3-2=1	1 1
	NT	-1 0	-3 3

6. Para el siguiente árbol, encuentre todos los equilibrios de *Nash* (en estrategias puras). ¿Cuáles de ellos es equilibrio perfecto en subjuego?



R: El juego en forma Normal queda:

I \ II	*l*	*r*
T	$\boxed{1}$ 2	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$
B	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$	0 0

El juego posee solo dos equilibrios en estrategias puras (*T, r*) y (*B, l*). El equilibrio (*B, l*) es obtenido por backward induction y por lo tanto es el único equilibrio perfecto en el subjuego (SPNE).