Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Caldentey, R. Epstein, P. Rey
Aux: J. Gacitúa, L. Valdés, D. Wilson

Solución Clase Auxiliar 27 de Mayo, 2008

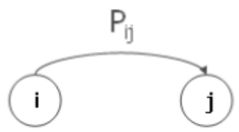
Cadenas de Markov

Problema 1

1. Definitivamente es posible modelar el número de maquinas buenas al comienzo de un da. Esto dado que el estado posee información que resume todo lo que necesitamos saber: Si existen i máquinas buenas al comienzo del día, entonces (dado que las maquinas solo pueden estar buenas o malas) obligatoriamente tengo $T-i$ maquinas malas las cuales estarán disponibles al comienzo del proximo día, si no fuese así no estarían malas (dado que solo pueden fallar durante el transcurso de un día).
Por otro lado tenemos que:

$$S(i,j) = \begin{cases} \binom{j}{i} q^i (1-q)^{j-i} & i \leq j \\ 0 & \sim \end{cases}$$

2. Claramente tendremos $T+1$ estados (desde el 0 al T), sin embargo dibujar las transiciones y un esquema de la cadena general es muy complicado (debido al elevado número de transiciones). Entonces la mejor forma de determinar la cadena es especificar cada transición entre estados con la probabilidad de transición asociada. Entonces la cadena queda como se muestra en la figura a continuación. Para



determinar P_{ij} debemos notar el hecho que si T-i maquinas estarán con seguridad buenas en el siguiente etapa, entonces sólo tiene sentido que $j \geq T-i$. Por otro lado, para los j que cumplen la condición tenemos que la transición implica que solo una cantidad $j-T+i$ de las i maquinas buenas sobrevive (o que $T-j$ no lo hacen). De esta forma, en términos de $S(i,j)$, tendremos que:

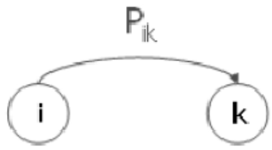
$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & j < T-i \\ S(T-j,i) & \sim \end{cases}$$

Finalmente es bastante claro que (dado que todos los estados están comunicados entre si, la cadena es finita y hay estados aperíodicos) la cadena es ergódica, por lo si existirán probabilidades estacionarias. Todos los estados forman una única clase recurrente.

3. Aquí tenemos que tener cuidado puesto que las revisiones se realizan al final del día. Entonces el beneficio lo obtengo cuando estoy en el estado T y no se hecha a perder ninguna máquina (y si revisan ese día). La multa la obtengo seguro si empiezo con menos de L máquinas, pero si tengo más, esto depende de si se hechan a perder las suficientes como para llegar al final con menos de L máquinas. Esto que así:

$$E(\text{Beneficios}) = r \cdot [-(C \cdot \sum_{k=0}^{L-1} \pi_k) - C \cdot \sum_{k=L}^{T} \pi_k \cdot \sum_{j=k-L+1}^{k} \binom{k}{j} (1-q)^{k-j} \cdot q^j + \pi_T \cdot (1-q)^T \cdot F]$$

4. La cadena sigue siendo la misma, solo cambiarán las probabilidades de transición. Ahora debemos considerar que al próximo día no contaremos con $T-i$ máquinas buenas con seguridad si no con una cantidad menor o igual. ¿Cuantas?: Si tengo $T-i$ máquinas con desperfectos puedo formar $\lfloor\frac{T-i}{J}\rfloor$ lotes de J, por lo tanto tendré $\lfloor\frac{T-i}{J}\rfloor\cdot J$ máquinas buenas con seguridad. Tomando esto en cuenta tendremos que:



Donde:

$$P_{ik} = \begin{cases} 0 & k < \lfloor\frac{T-i}{J}\rfloor\cdot J \\ \binom{i}{i+\lfloor\frac{T-i}{J}\rfloor\cdot J-k} q^{i+\lfloor\frac{T-i}{J}\rfloor\cdot J-k}\cdot(1-q)^{k-\lfloor\frac{T-i}{J}\rfloor\cdot J} & k \geq \lfloor\frac{T-i}{J}\rfloor\cdot J \end{cases}$$

En función de $S(i,j))$ queda de la siguiente forma ($n=\lfloor\frac{T-i}{J}\rfloor$):

$$P_{ik} = \begin{cases} 0 & k < n\cdot J \\ S(i+n\cdot J-k, i) & k \geq n\cdot J \end{cases}$$

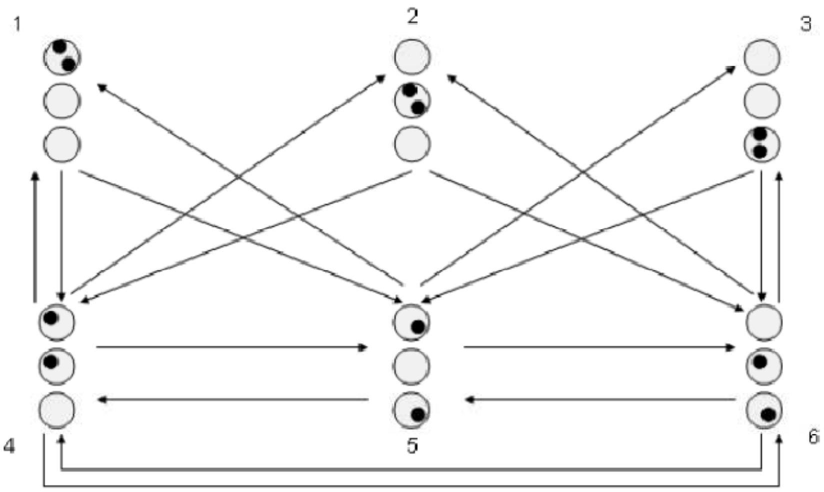
5. Utilizando el mismo razonamiento de la parte c) tendremos que::

$$\begin{aligned} E(\text{Beneficios}) &= r\cdot\Big[(-C\cdot\sum_{k=0}^{L-1}\pi_k) - C\cdot\sum_{k=L}^{T}\pi_k\cdot\sum_{j=k-L+1}^{k}\binom{k}{j}(1-q)^{k-j}\cdot q^j \\ &\quad +\pi_T\cdot(1-q)^T\cdot F + \sum_{i=0}^{T}\pi_i\cdot n\cdot K\Big] \end{aligned}$$

Noten que el termino extra (respecto a la parte c)) se refiere al costo fijo, el cual depende del estado en el que nos encontramos, específicamente al valor de i respecto a valor de T (para ver cuantos lotes se mandan a reparar).

Problema 2

1. Modelamos los estados como el número de bolitas bajo cada vaso. Tendremos entonces que la cadena se define de la siguiente forma:



La matriz de transiciones es la siguiente:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{vmatrix}$$

2. De acuerdo a la definición $r_1 = r_2 = r_3 = 2$ y $r_4 = r_5 = r_6 = 1$ Entonces: $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{9}$ y $\pi_4 = \pi_5 = \pi_6 = \frac{2}{9}$.
Por otro lado para que $\overrightarrow{\pi}$ sea ley estable debe cumplir con:

$$\overrightarrow{\pi} = \overrightarrow{\pi}^T \cdot P$$
$$\sum_{i=1}^{6} \pi_i = 1$$
$$\pi_i \geq 0 \quad \forall i$$

Las dos últimas condiciones se cumplen. Solo basta comprobar que (propuesto):

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{vmatrix}$$

3. La cadena es ergódica (una sola clase recurrente, aperíodica) por lo que posee solo una ley estable, la cual es la ley de probabilidades estacionarias. Como ya encontramos una ley estable, esta misma es la ley estacionaria. La intuición del resultado va por el lado de la conectividad entre estados (los con bolitas separadas son accesibles desde muchos más estados y a estados del mismo tipo, en cambio para los estados con bolitas juntas no existen transiciones entre el mismo tipo.)

4. Para ganar debemos parar el juego en un estado tal que sea factible el ganar, y adicionalmente escoger correctamente el vaso ganador. Entonces la probabilidad de ganar será:

$$P[\text{Ganar}] = P[\text{Parar en estado factible}] \cdot P[\text{Escoger ganador}]$$

$$P[\text{Ganar}] = (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$