Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Caldentey, R. Epstein, P. Rey
Aux: J. Gacitúa, L. Valdés, D. Wilson

Clase Auxiliar 27 de Mayo, 2008

Cadenas de Markov

Problema 1

Una unidad productiva de una empresa minera tiene un número muy grande que llamaremos **T** mini retro excavadoras para la extracción del mineral. Estas máquinas se utilizan durante el día y al caer la tarde se guardan para ser utilizados en la mañana siguiente.

Sin embargo, existe una probabilidad q que una máquina en operación falle durante un día, independiente de cuántos días consecutivos lleve operando. En estos casos la mini retro excavadora será enviada al taller de reparación al final del día en el que falla, donde su mantenimiento siempre se realiza al día siguiente. De esta manera, una máquina que falla un día t estará lista para su utilización en la mañana del día $t+2$ independiente de lo que pase con las demás.

1. Justifique porqué es posible modelar como una cadena de Markov en tiempo discreto el **Número de mini retro excavadoras buenas al inicio de cada día**. ¿Cuál es la probabilidad que un día fallen i máquinas si esa mañana había j buenas?. Llame a esta probabilidad $s(i,j)$.
2. Modele la situacion descrita como una cadena de Markov en tiempo discreto. Encuentre expresiones generales para las probabilidades de transición en función de $s(i,j)$, clasifique los estados en clases y caracterícelas. Argumente la existencia de una ley de probabilidades estacionarias.
3. Suponga que la cadena anterior admite probabilidades estacionarias y que usted conoce el vector Π. Además se sabe que si la mina al final de un día cualquiera cuenta con menos de **L** máquinas buenas y es inspeccionada por la gerencia de producción debe pagar una multa de $**C**. Según información histórica en un día cualquiera existe un probabilidad r de que se produzca un revisión. Sin embargo, si al momento de producirse la inspección cuenta con la totalidad de estas máquinas en buen estado la unidad recibirá un incentivo económico de $**F**. Entregue una expresión para los beneficios diarios en en largo plazo por concepto de multas y estímulos por revisión del organismo de seguridad.

Considere que esta unidad de la mina modifica su política de envío de máquinas a mantención de manera que las enviará al taller sólo en lotes de J máquinas que necesitan reparación. Todas las máquinas enviadas la taller serán reparadas el día siguiente y estarán disponibles en la mañana del día subsiguiente del que fueron enviadas a mantención. La probabilidad que una máquina que está en funcionamiento una mañana cualquiera falle ese día seguirá siendo q.

4. Modele esta nueva situación como una cadena de Markov en tiempo discreto. Dibújela con los respectivos estados, encuentre expresiones generales para las probabilidades de transición en función de $s(i,j)$.
5. Suponga que la cadena anterior admite probabilidades estacionarias y que usted conoce el vector Π, y que la gerencia de operaciones realiza revisiones como las descritas en la parte (3) con las mismas probabilidades, costos y beneficios. Suponga además que cada vez que esta unidad envía un lote máquinas al taller incurre en un costo fijo $**K**. Entregue una expresión para los beneficios diarios en en largo plazo por concepto de multas y estímulos por revisión del organismo de seguridad.

Problema 2

Un conocido mago del Paseo Ahumada ha hecho una respetable fortuna con el siguiente juego de azar: en una mesa tiene tres vasos (no transparentes) boca-abajo y dos bolitas que se colocan (juntas o por separado) debajo de alguno de los vasos. Luego, con una habilidad t rapidez impresionante, el mago procede a mover las bolitas de un vaso a otro. En cada movimiento cambia de posición sólo una bolita. Esto lo hace incontables veces hasta que un jugador deseoso de apostar le dice "STOP". En ese momento el jugador tiene que escoger uno de los vasos. Si debajo de él están las DOS bolitas, gana. De lo contrario pierde. Para simplificar el juego, asuma que en cada movimiento el mago escoge con igual probabilidad cualquiera de las bolitas, y también equiprobablemente escoge a cuál de los OTROS vasos la cambia.

1. Muestre que el juego anterior se puede modelar como una Cadena de markov en tiempo discreto con sólo 6 estados. Construýala. Identifique los estados y especifique cuáles son las probabilidades de transición.
2. Sea r_k el nmero de vasos vacíos en el estado k, y $\pi_k = (3 - r_k)/9$. Demuestre que el vector definido por los π_k corresponde a una ley estable del sistema.
3. Argumente si la cadena anterior admite o no probabilidades estacionarias. En caso que su respuesta sea positiva, cuánto valen?. Explique intuitivamente por qué hay estados con mayor probabilidad estacionaria que otros.
4. Ignorando el hecho que usted pueda tener una vista muy aguda, a priori, cuál es la probabilidad de ganar el juego?. Considere que usted escoge equiprobablemente cualquiera de los tres vasos y que el mago hace "muchos"movimientos antes de que usted le diga "STOP".