Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

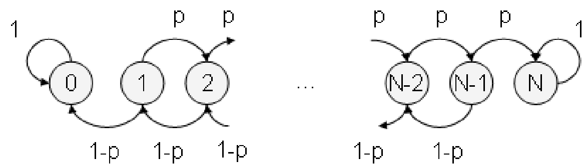
IN44A: Investigación Operativa
Profs: René Caldentey, Rafael Epstein, Pablo Rey
Aux : J. Gacitúa, L. Valdés, D. Wilson

.

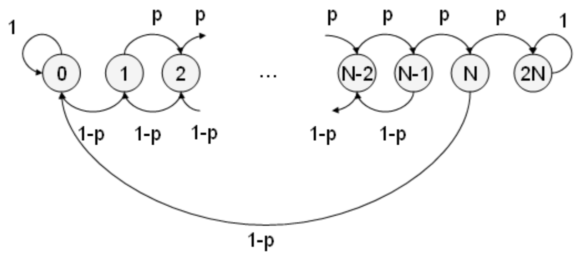
Solución Clase Auxiliar 14 de mayo

Problema 1

1. La cadena es la siguiente:



2. La cadena es la siguiente:



3. Sea:

$$f_i = P[\text{Ganar dado que parto con i unidades}]$$

Inmediatamente vemos que $f_0 = 0$ y que $f_N = 1$. De la misma forma vemos (condicionando en el resultado de la primera apuesta) que:

$$f_i = \frac{1}{2}f_{i+1} + \frac{1}{2}f_{i-1} \qquad \forall 0 < i < N$$

lo que implica que:

$$f_{i+1} - f_i = f_i - f_{i-1} \qquad \forall 0 < i < N$$

La primera ecuación nos dice que:

$$f_2 - f_1 = f_1$$

Utilizando esto vemos que:

$$f_i - f_{i-1} = f_1$$

Ahora si sumamos las $N-1$ primeras ecuaciones tendremos que (utilizando la suma telescópica):

$$f_N - f_1 = (N-1) \cdot f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{N}$$

De la misma forma si sumamos las $i-1$ primeras restricciones veremos que:

$$f_i = i \cdot f_1 = \frac{i}{N}$$

4. Para el caso general procederemos exactamente como lo hicimos para el caso particular:

$$f_i = p \cdot f_{i+1} + (1-p) \cdot f_{i-1} \qquad \forall 0 < i < N$$

lo que implica que:

$$f_{i+1} - f_i = \rho(f_i - f_{i-1}) \qquad \forall 0 < i < N$$

Donde $\rho = \frac{1-p}{p}$ La primera ecuación nos dice que:

$$f_2 - f_1 = \rho f_1$$

Utilizando esto vemos que:

$$f_i - f_{i-1} = \rho^{i-1} f_1$$

Ahora si sumamos las $N-1$ primeras ecuaciones tendremos que (utilizando la suma telescópica):

$$f_N - f_1 = (\sum_{i=1}^{N-1} \rho^i) \cdot f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N-1} \rho^i} = \frac{1-\rho}{1-\rho^N}$$

De la misma forma si sumamos las $i-1$ primeras restricciones veremos que:

$$f_i = (\sum_{k=0}^{N-1} \rho^k) \cdot f_1 = \frac{1-\rho^i}{1-\rho^N}$$

Problema 2

Sea $N_{[a,b]}(t)$= número de autos en el tramo $[a,b]$ en el instante t.

$$P(N_{[ab]}(t) = k) \quad = \quad \sum_{n=k}^{\infty} P(N_{[ab]}(t) = k | N(t) = n) \cdot P(N(t) = n)$$

Un auto que entra a la carretera en el instante s y elige una velocidad v_i, se encontrará en el tramo $[a,b]$ en t siempre y cuando:

$$v_i(t-s) \geq a \wedge v_i(t-s) \leq b$$
$$\Rightarrow \frac{a}{(t-s)} \leq v_i \frac{b}{(t-s)}$$

Luego la probabilidad que un auto llegado en s esté en $[a,b]$ en t es:

$$P(s,t) = \int_{\frac{a}{(t-s)}}^{\frac{b}{(t-s)}} F(v_i) dv_i$$

Luego, un auto que llega en un instante cualquiera estará en el intervalo con la siguiente probabilidad:

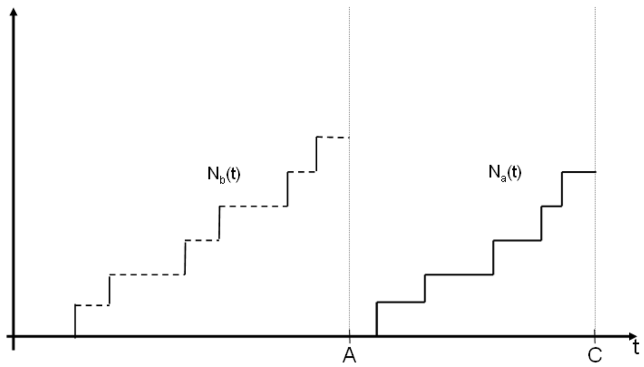
$$\int_0^t \frac{1}{t} P(s,t)ds = \frac{P(t)}{t}$$

Entonces el número de autos en el intervalo es:

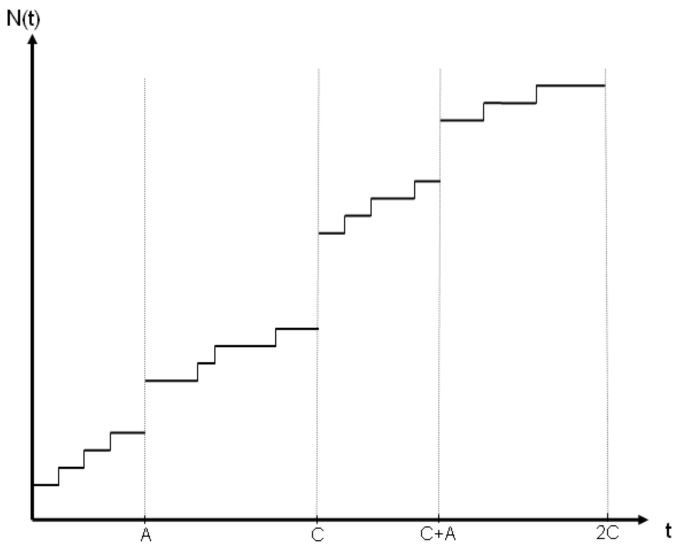
$$P(N_{[a,b]}(t) = k) = \frac{(\lambda P(t))^k e^{-\lambda P(t)}}{k!}$$

Problema 3

1. (1,0 ptos) Sean $\{N_a(t) : t \geq 0\}$, $\{N_b(t) : t \geq 0\}$ y $\{N_T(t) : t \geq 0\}$ los procesos de conteo asociados al número de autos que cruzan la calle a, la calle b y ambas, respectivamente. El diagrama de autos que esperan cruzar la intersección (por una calle en particular) es la que se muestra en la figura a continuación:



Entonces la dinámica del total de autos que cruza por alguna de las calles es la siguiente:



Para calcular la distribución de los autos que cruzan la intersección en un ciclo hay que notar que, dada la definición del ciclo, cruzaran todos los autos que llegan por la calle a durante un tiempo C y todos los que llegan por la calle b en el mismo tiempo. Entonces $N_a(C)$sigue un proceso de poisson de tasa λ_a, y $N_b(C)$ sigue un proceso de Poisson de tasa λ_b. Por suma de procesos de Poisson es directo que $N_T(C)$ sigue un proceso de Poisson de tasa $(\lambda_a + \lambda_b)$. Es importante notar que solo para intervalos de largo C se cumple esta propiedad (dado que solo en esos instantes han cruzado todos los autos que han llegado al cruce).

2. Cada uno de los autos que cruzo el ciclo (dada la respuesta a la pregunta (a)) tiene una probabilidad $\frac{\lambda_a}{\lambda_a+\lambda_b}$ de haber cruzado por la calle a. Para ver esto solo basta pensar en que la llegada de autos por la calle a viene de la división del proceso de Poisson $N_T(C)$ (de tasa $\lambda_a + \lambda_b$) con probabilidad $\frac{\lambda_a}{\lambda_a+\lambda_b}$ (si multiplican la tasa y la prob. recuperan el proceso original). Entonces, dado que llegaron n tendre que:
$$P[N_a(C) = k|N_T(C) = n] = \binom{n}{k}(\frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b})^k \cdot (\frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b})^{n-k}$$
Es decir una distribución binomial de parámetros n y $(\frac{\lambda_a}{\lambda_a+\lambda_b})$.

3. Veamos esto como un proceso de Poisson filtrado. Si un auto llega (por a) en el instante s (medido desde el comienzo del ciclo) tiene la siguiente probabilidad de haber esperado para cruzar:
$$P[s] = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq s < A \\ 1 & si \quad A \leq s < C \end{cases}$$
Entonces independiente del instante de llegada, cada uno de estos N autos tiene una probabilidad p de haber tenido que esperar, donde:
$$p = \int_0^C \frac{P[s]}{C} ds = \int_0^A \frac{0}{C} ds + \int_A^C \frac{1}{C} ds = 1 - \frac{A}{C}$$
Donde se utilizo la distribución uniforme [0,C] de las llegadas condicionadas de un proceso de Poisson. Sea $N(t)_{Ea}$ el número de autos que ha cruzado hasta t pero que ha debido esperar la luz verde. Entonces tendremos que:
$$P[N(C)_{Ea} = k|N_a(C) = n] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
Es decir una distribución binomial de parámetros n y p.

4. Sea $N_{NE}(t)$ el número de autos que ha cruzado hasta t y que no espera luz verde para cruzar. Nuevamente veamos el cuento como un proceso de Poisson filtrado (en particular será muy parecido a lo que hicimos en la clase auxiliar).
Si un auto llega en el instante s (medido desde el comienzo del ciclo) tiene la siguiente probabilidad de cruzar inmediatamente.
$$P[s] = \begin{cases} \frac{\lambda_a}{\lambda_a+\lambda_b} & si \quad 0 \leq s < A \quad \text{(la probabilidad de llegar por a)} \\ \frac{\lambda_b}{\lambda_a+\lambda_b} & si \quad A \leq s < C \quad \text{(la probabilidad de llegar por b)} \end{cases}$$
Noten que estamos filtrando $N_T(C)$.
Entonces tendremos que la prob. descondicionada del instante de llegada será:
$$p = \int_0^C \frac{P[s]}{C} ds = \int_0^A \frac{1}{C} \cdot \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} ds + \int_A^C \frac{1}{C} \cdot \frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} ds = \frac{[\lambda_a \cdot A + \lambda_b \cdot (C - A)]}{C \cdot \lambda_a + \lambda_b}$$
Entonces tendremos que:
$$P[N(C)_{NE} = k|N_T(C) = n] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
Es decir una distribución binomial de parámetros n y p.

5. Es fácil ver que el costo total tiene solo 2 componentes, una asociada a los autos que vienen por a y esperan, y la otra asociada a los autos que vienen por b y esperan.
   Entonces (dado que en un ciclo la distribución de los autos que vienen por a y esperan es Poisson de tasa $\lambda_a \cdot B$ y que de la misma forma, la distribución de los autos que vienen por b y esperan es Poisson de tasa $\lambda_b \cdot A$) tendremos que:

$$\begin{aligned}
E[\text{Costo ciclo}] &= E[\text{Autos por a}] + E[\text{Autos por b}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E[\text{Autos por a}|N_a(B) = n] \cdot P[N_a(B) = n] \\
&\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} E[\text{Autos por b}|N_b(A) = n] \cdot P[N_b(A) = n]
\end{aligned}$$

   Ahora, si un auto que llega por a, lo hace a s unidades de tiempo desde que se comenzó la luz roja, incurrirá en un costo igual a $M \cdot (B - s)$. Sin embargo dada la distribución uniforme de los tiempos de llegada de un Poisson uniforme, tendremos que este costo C será:

$$C = \int_0^B \frac{M \cdot (B - s)}{B} ds = \frac{M \cdot B}{2}$$

   Es fácil ver que:

$$E[\text{Autos por a}|N_a(B) = n] = n \cdot \frac{M \cdot B}{2}$$

   La misma lógica entrega el siguiente resultado para la calle b:

$$E[\text{Autos por a}|N_a(B) = n] = n \cdot \frac{M \cdot A^2}{3}$$

   Entonces:

$$\begin{aligned}
E[\text{Costo ciclo}] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[\text{Autos por a}|N_a(B) = n] \cdot P[N_a(B) = n] \\
&\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} E[\text{Autos por b}|N_b(A) = n] \cdot P[N_b(A) = n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [n \cdot \frac{M \cdot B}{2}] \cdot P[N_a(B) = n] + \sum_{n=0}^{\infty} [n \cdot \frac{M \cdot A^2}{3}] \cdot P[N_b(A) = n] \\
&= \frac{\lambda_a \cdot M \cdot B^2}{2} + \frac{\lambda_b \cdot M \cdot A^3}{3}
\end{aligned}$$