Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: René Caldentey, Rafael Epstein, Pablo Rey
Aux : J. Gacitúa, L. Valdés, D. Wilson

.

Clase Auxiliar 14 de mayo

Problema 1

Considere un jugador que apuesta sucesivas veces en el mismo juego. En cada jugada existe una probabilidad p de ganar una unidad y una probabilidad $1 - p$ de perder una unidad. Se asume que las jugadas sucesivas son independientes. El jugador comienza con una cantidad de i, $1 < i < N$ y juega hasta que pierde todo o llega a N.

1. Construya una cadena de Markov que describa la fortuna del jugador en cada instante. Incluya las probabilidades de transición.
2. El jugador al llegar a N cambia su estrategia y decide apostar doble o nada, de manera que con probabilidad p su riqueza es $2N$ (y se retira), mientras con probabilidad $1-p$ pierde todo (y su riqueza se reduce a cero). Modele esta nueva situación.
3. Si en la situación de la parte (a), la probabilidad de ganar es $p = 1/2$, ¿De qué depende que nuestro jugador finalmente gane o pierda?. Sin hacer cálculos entregue valores específicos cuando se pueda e interprete sus resultados.
4. Resuelva el problema para el caso general, es decir, encuentre las probabilidades de terminar ganando o perdiendo el juego si se empieza con una cantidad de i, $1 < i < N$. Se juega hasta que pierde todo o llega a N, con $p \neq (1 - p)$.

Problema 2

Suponga que autos entran en el kilómetro 0 a una carretera de una dirección infinita según un proceso de Poisson de tasa λ. El auto i que entra escoge una velocidad constante V_i (kms/hrs) a la cual viajar. Suponga que las velocidades V_i son variables aleatorias, independientes, positivas y de distribución común F. Encuentre la distribución del número de autos que se encuentran entre los kilómetros a y b ($a < b$) de la carretera en el instante t (medido en horas). Suponga que los autos se adelantan unos a los otros sin pérdida de tiempo.

Problema 3

Suponga que la intersección de dos calles unidireccionales, que llamaremos a y b, está regulado por un semáforo, tal como se ilustra en la figura. El semáforo funciona en un ciclo de C unidades de tiempo, de las cuales un tiempo A corresponde a luz verde para la calle a y un tiempo B verde para la calle b (sólo hay luces verdes y rojas).

Por la calle a llegan autos según un proceso de Poisson de tasa $\lambda_a[\frac{\text{autos}}{u.t.}]$, mientras que por la calle b llegan autos según un Proceso de Poisson de tasa $\lambda_b[\frac{\text{autos}}{u.t.}]$. Los autos que llegan a la intersección y encuentran la luz en verde cruzan inmediatamente, pero si encuentran el semáforo en rojo deben esperar hasta el próximo cambio de luz, momento en que cruzan instantáneamente la intersección (el tiempo que demoran en cruzar es despreciable).

Si ambas calles son lo suficientemente anchas como para que no se formen colas y no está permitido que los vehículos doblen en este cruce, conteste las siguientes preguntas:

1. Realice un diagrama que muestre el número de automóviles esperando cruzar la intersección en una de las dos calles (por ejemplo la calle a) en función del tiempo y otro que muestre el número total de automóviles que han cruzado la intersección en función del tiempo. ¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de autos que cruzan la intersección en 1 ciclo del semáforo? HINT: Considere que un ciclo termina justo despues que cruzan instantáneamente los autos esperando en la calle a.
2. Si en un ciclo cruzaron en total N autos por la intersección, ¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de autos que cruzaron por la calle a?
3. Si en un ciclo cruzaron la intersección N_a autos por la calle a, ¿Cuál es la distribución de probabilidad del número de autos que tuvo que esperar por cruzar?
4. Si en un ciclo cruzaron en total N autos por la intersección, ¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de autos que NO tuvo que esperar por cruzar?

Suponga ahora que los automovilistas que circulan por la calle a perciben un costo igual a $\$M \cdot t$, donde t es el tiempo que deben esperar antes de poder cruzar, mientras que para los automovilistas que circulan por la calle b este costo queda bien modelado por la expresión $\$M \cdot t^2$

4. Calcule el costo esperado incurrido por los automovilistas que esperan en un ciclo del semáforo. HINT: Puede ser útil calcular la esperanza del tiempo que debe permanecer un automovilista frente a la luz roja, condicional a que llega cuando la luz está roja.