



IN34A - OPTIMIZACIÓN

Examen

10 de Julio de 2008

Pregunta 1 (40 %)

1. Formule el problema del vendedor viajero como un problema de decisión y explique por qué este problema de decisión pertenece a NP.
2. Explique la diferencia entre el Método de Newton y el Método de Newton globalizado (para ello describa ambos métodos).
3. Mencione al menos 2 algoritmos para programación lineal de complejidad polinomial. ¿Qué ventajas o desventajas tienen con respecto a SIMPLEX?
4. Suponga que tiene un problema de programación entera puro (todas sus variables deben ser enteras) de minimización. ¿Qué puede afirmar si la solución de la relajación lineal es entera? Si la solución no es entera, ¿qué información le da el valor del óptimo de la relajación lineal?
5. Formule el problema de obtener un flujo máximo en una red con capacidades inferiores y superiores en cada arco, como un problema lineal.
6. Muestre en un ejemplo por qué Dijkstra podría funcionar mal si hay arcos de longitud negativa. Justifique.

Pregunta 2 (20 %)

El entrenador de la selección chilena de fútbol, apodado *el loco*, desea imponer su estilo de juego al equipo. Su metodología de trabajo consiste en que el equipo practique repetidamente J jugadas predefinidas. Entre más veces el equipo repita cada jugada es más probable que el equipo juegue al *estilo del loco*. Una repetición de la jugada j requiere de w_j horas de entrenamiento. El cuerpo técnico ha estimado que si el equipo repite n_j veces la jugada j , con probabilidad $P_j(n_j)$ el equipo realizará con éxito la jugada j en el próximo partido, independiente del número de repeticiones de las otras jugadas. De esta forma, la probabilidad de que el equipo juegue al *estilo del loco* en el próximo partido es igual a la probabilidad de que el equipo realice con éxito cada una de las J jugadas, es decir, $\prod_{j=1}^J P_j(n_j)$. El cuerpo técnico cuenta con T horas para preparar el próximo partido y desea determinar el número óptimo de repeticiones de cada jugada de forma de maximizar la probabilidad de que el equipo juegue al *estilo del loco* en el próximo partido.

1. Modele el problema utilizando Programación Dinámica.
2. Considere que $T = 8[\text{horas}]$, $w_1 = 2[\text{horas/rep}]$, $w_2 = 2[\text{horas/rep}]$, $w_3 = 4[\text{horas/rep}]$ y las probabilidades $P_j(n_j)$ de la siguiente tabla:

Repeticiones	Jugada 1	Jugada 2	Jugada 3
0	0.6	0.7	0.6
1	0.8	0.8	0.8
2	0.9	0.9	0.9
3	0.95	0.95	0.92
4	0.98	0.98	0.95

Resuelva su modelo de Programación Dinámica para la instancia anterior. ¿Cuál(es) es(son) la(s) política(s) óptima(s) que debe tomar el cuerpo técnico? ¿Cuál es la probabilidad de que la selección juegue al *estilo del loco* si el cuerpo técnico escoge una política óptima?

Pregunta 3 (40 %)

Una planta química almacena tres tipos de componentes básicos: A_1, A_2, A_3 , de los cuales puede producir los siguientes tipos de componentes derivados A_4, A_5, A_6 . Cada componente derivado A_j (con $j = 4, 5, 6$) debe contener un p_{ij} porcentaje (en volumen) del componente básico A_i (con $i = 1, 2, 3$). La planta posee $E = \{1, \dots, g\}$ estanques, cada uno con capacidad (en volumen) de v_e litros, $e \in E$. Cada estanque puede guardar un sólo tipo de componente. Para vender un componente derivado, éste debe pasar primero por un estanque para asegurar la homogeneidad de la mezcla (aunque sea durante el mismo período de venta, pero verificando que todo el volumen que se mezcla pueda ser almacenado).

Nuestro objetivo es decidir la política de compra de componentes básicos, para satisfacer la demanda d_{kt} (con $k = 1, \dots, 6$) por cada tipo de componente básico y derivado en un horizonte de $t \in T = \{1, \dots, h\}$ a costo mínimo, donde la compra de cada componente básico tiene un costo fijo de c_i^f en todo período, y un costo variable de c_i^v (por litro) en cada período.

Formule éste problema como un problema de programación lineal entera mixto, asuma que conoce el estado del sistema en el período cero.



IN34A - OPTIMIZACIÓN

Pauta Examen

10 de Julio de 2008

Pregunta 1 (40 %)

1. Al formular el problema como un problema de decisión se busca, dado un grafo G y un entero k , si existe en G algún tour de longitud $\leq k$.

El problema está en NP pues si alguien da una solución para una instancia del problema cuya respuesta es SI en el problema de decisión, es posible verificar en tiempo polinomial que esta solución es correcta (certificado polinomial).

Si bien se pedía formular el problema como un problema de decisión, también se aceptará formularlo como un problema de optimización. Al formular el problema como un problema de optimización se busca encontrar un tour óptimo. Definiendo el costo de ir desde la ciudad i a la j como c_{ij} y considerando la variable de decisión

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el vendedor va desde la ciudad } i \text{ a la } j \\ 0 & \sim \end{cases},$$

el modelo de optimización queda:

$$\text{mín} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i=1; i \neq j}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$\sum_{j=1; j \neq i}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$\sum_{i \in S; j \in S; i \neq j} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq \{1, \dots, n\} \text{ tal que } 2 \leq |S| \leq n - 2 \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n \quad (5)$$

La dificultad del problema está dada principalmente por la gran cantidad de restricciones que genera (4), del orden de $O(2^n)$ donde n es el número de ciudades.

(0.5 puntos por formular el problema como un problema de decisión (u optimización) y 0.5 por explicar por qué pertenece a NP.)

2. Ambos son métodos de descenso para optimización irrestricta. En general, un método de descenso genera una sucesión de puntos $\{x^k\}$ tal que la sucesión $\{f(x^k)\}$ sea monótona decreciente si se quiere minimizar f . El punto x^{k+1} se construye a partir de x^k tal que $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k$, donde d^k y λ_k son la dirección de descenso y el paso de la iteración respectivamente. En el Método de Newton y en el Método de Newton Globalizado se utiliza $d^k = -[Hf(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k)$. En el

Método de Newton se utiliza un paso $\lambda_k = 1$, en cambio en el Método de Newton Globalizado se busca un paso $\lambda_k > 0$ resolviendo:

$$\begin{aligned} \min f(x^k + \lambda d^k) \\ \text{s.a. } \lambda_k \geq 0 \end{aligned}$$

(1 punto)

3. ■ El de Khachiyan (1979) conocido como Método de las Elipsoides, de complejidad $O(Ln^5)$ donde L es el número de bits necesarios para almacenar los datos del problema (asumiendo que $n \gg m$). En el sentido del análisis del peor caso el Método de las Elipsoides es teóricamente mejor que SIMPLEX. En la práctica, en la gran mayoría de los casos, SIMPLEX funciona mucho mejor. (0.5 puntos)
- El de Karmarkar (1984) conocido como un algoritmo de punto interior. La característica central de este algoritmo es que se mueve por el interior de la región factible (y no por los vértices, como SIMPLEX). Este algoritmo además funciona mejor que SIMPLEX en la práctica (Complejidad Teórica $O(Ln^{3.5})$). Nesterov y Nemirovskii (1994) desarrollan otro algoritmo de punto interior de mejor complejidad teórica, $O(Lm^3)$. Si bien estos pueden ser mejores que SIMPLEX, especialmente para problemas de gran tamaño, la forma en que son implementados computacionalmente resulta un factor crítico y una desventaja con respecto a SIMPLEX. (0.5 puntos)
4. Si la solución óptima de la relajación lineal es entera, ésta también es la solución óptima del problema entero original. Si no es entera, como el problema es de minimización, el valor óptimo de la función objetivo de la relajación lineal es una cota inferior del valor óptimo de la función objetivo del problema entero original ($z_{RL}^* \leq z_{PE}^*$). Esto pues el conjunto de soluciones factibles del problema entero es un subconjunto del conjunto de soluciones factibles del problema relajado. (1 punto)
5. Consideremos el grafo $G = [N, A]$. En cada arco $(i, j) \in A$ se tiene una capacidad mínima l_{ij} y una máxima u_{ij} de flujo que puede pasar por este. Se desea llevar la máxima cantidad de flujo desde el nodo inicial $s \in N$ hasta el nodo final $t \in N$, el que se decide a través de la variable $F \geq 0$. Luego el modelo lineal queda:

$$\begin{aligned} \max \quad & F \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & \sum_{\{j/(s,j) \in A\}} f_{sj} - \sum_{\{k/(k,s) \in A\}} f_{ks} = F \end{aligned} \tag{7}$$

$$\sum_{\{j/(i,j) \in A\}} f_{ij} - \sum_{\{k/(k,i) \in A\}} f_{ki} = 0 \quad \forall i \in N \setminus \{s, t\} \tag{8}$$

$$\sum_{\{j/(t,j) \in A\}} f_{tj} - \sum_{\{k/(k,t) \in A\}} f_{kt} = -F \tag{9}$$

$$l_{ij} \leq f_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \tag{10}$$

$$F \geq 0 \tag{11}$$

Es válido suponer que no existen arcos que llegan a $s \in N$, ni arcos que salen de $t \in N$. Bajo este supuesto se tendría que $\sum_{\{k/(k,s) \in A\}} f_{ks} = 0$ y $\sum_{\{j/(t,j) \in A\}} f_{tj} = 0$ en las restricciones (7) y (10) respectivamente. (1 punto)

6. Si hay arcos de longitud negativa, el algoritmo podría no encontrar la ruta más corta. Por ejemplo, en una red de 3 nodos, donde hay un camino de 1 al 3 de longitud 2, de 1 al 2 de longitud 3 y otro de 2 al 3 de longitud -2, Dijkstra no encuentra la ruta mas corta de 1 a 3. Encuentra el camino de longitud 2 y no el de longitud 1. (1 punto)

Pregunta 2 (20 %)

1. a) **Etapas:** (0.5 puntos)
Cada una de las jugadas, $j = 1, 2, \dots, J$.
- b) **Variables de decisión:** (0.5 puntos)
 X_j : Cantidad de repeticiones de la jugada j que realiza el equipo.
- c) **Variables de estado:** (0.5 puntos)
 S_j : Horas de entrenamiento disponibles al inicio de la etapa j .
- d) **Recurrencia de estados:** (0.5 puntos)

$$S_{j+1} = S_j - w_j X_j$$

- e) **Función de beneficios:** (0.5 puntos)

$$V_j(S_j, X_j) = P_j(X_j) \cdot V_{j+1}^*(S_{j+1})$$

$$V_j^*(S_j) = \max\{V_j(S_j, X_j)\}$$

$$s.a. \quad 0 \leq X_j \leq \frac{S_j}{w_j}$$

- f) **Condiciones de borde:** (0.5 puntos)

$$S_1 = T$$

$$V_{J+1}^*(S_{J+1}) = 1 \quad \forall S_{J+1}$$

2. ■ **Jugada 3:** (1 punto)

$$V_3(S_3, X_3) = P_3(X_3) \cdot 1$$

$S_3 \backslash X_3$	0	1	2	$V_3^*(S_3)$	X_3^*
8	0.6	0.8	0.9	0.9	2
6	0.6	0.8	-	0.8	1
4	0.6	0.8	-	0.8	1
2	0.6	-	-	0.6	0
0	0.6	-	-	0.6	0

- **Jugada 2:** (1 punto)

$$V_2(S_2, X_2) = P_2(X_2) \cdot V_3^*(S_2 - 2X_2)$$

$S_2 \backslash X_2$	0	1	2	3	4	$V_2^*(S_2)$	X_2^*
8	$0.7 \cdot 0.9 = 0.63$	$0.8 \cdot 0.8 = 0.64$	$0.8 \cdot 0.9 = 0.72$	$0.6 \cdot 0.95 = 0.57$	$0.6 \cdot 0.98 = 0.588$	0.72	2
6	$0.7 \cdot 0.8 = 0.56$	$0.8 \cdot 0.8 = 0.64$	$0.9 \cdot 0.6 = 0.54$	$0.95 \cdot 0.6 = 0.57$	-	0.64	1
4	$0.7 \cdot 0.8 = 0.56$	$0.8 \cdot 0.6 = 0.48$	$0.9 \cdot 0.6 = 0.54$	-	-	0.56	0
2	$0.7 \cdot 0.6 = 0.42$	$0.8 \cdot 0.6 = 0.48$	-	-	-	0.48	1
0	$0.7 \cdot 0.6 = 0.42$	-	-	-	-	0.42	0

■ **Jugada 1: (1 punto)**

$$V_1(S_1, X_1) = P_1(X_1) \cdot V_2^*(S_1 - 2X_1)$$

$S_1 \backslash X_1$	0	1	2	3	4	$V_1^*(S_1)$	X_1^*
8	$0.6 \cdot 0.72 = 0.432$	$0.8 \cdot 0.64 = 0.512$	$0.9 \cdot 0.56 = 0.504$	$0.95 \cdot 0.48 = 0.456$	$0.98 \cdot 0.42 = 0.4116$	0.512	1

Entonces la política óptima es:

j	1	2	3	4
S_j	8	6	4	0
X_j^*	1	1	1	-

Luego la probabilidad de que la selección juegue al *estilo del loco* es $V_1^*(8) = 0,512$, si el cuerpo técnico escoge la política óptima.

Pregunta 3 (40 %)

Variables:

- x_{ekt} es uno si el contenedor e tiene el componente k en el período t , cero en otro caso. (0.2 puntos)
- f_{ekt} litros del componente k que el contenedor e tiene en el período t . (0.2 puntos)
- $m_{eie'jt}$ litros del componente básico i en el estanque e destinados a producir componente derivado j en el estanque e' en el período t . (0.2 puntos)
- m_{eit}^+ compras del componente básico i destinadas al estanque e en el período t . (0.2 puntos)
- m_{ekt}^- volumen del componente k en el estanque e en el período t destinado a satisfacer demanda. (0.2 puntos)
- z_{it} uno si se compra componente básico i en el período t , cero en otro caso. (0.2 puntos)

Restricciones:

- Uso exclusivo de estanques: (0.4 puntos)

$$\sum_{k=1}^6 x_{ekt} \leq 1, \quad \forall e \in E, t \in T$$

- Capacidad (en volumen) de cada estanque: (0.4 puntos)

$$f_{eit} \leq v_e x_{eit}, \quad \forall i = 1, \dots, 3, t \in T, e \in E$$

- Capacidad (en volumen) de cada estanque, y homogeneidad de compuestos derivados: (0.5 puntos)

$$f_{ejt} + \sum_{\substack{i=1, \dots, 3, \\ e' \in E}} m_{e'iejt} \leq v_e x_{ejt}, \quad \forall j=4, \dots, 6, t \in T, e \in E$$

- Ligazón de variables de compra continuas-enteras: (0.4 puntos)

$$m_{eit}^+ \leq D_{it}^+ z_{it}, \forall t \in T, i = 1, \dots, 3$$

donde D_{it}^+ es una cota superior en las demandas futuras (de t en adelante) por el componente básico i y sus derivados, por ejemplo

$$D_{it}^+ = \sum_{t' \geq t} \left(d_{it'} + \sum_{j=4}^6 p_{ij} d_{jt'} \right)$$

- Satisfacer demanda: (0.4 puntos)

$$\sum_{e \in E} m_{ekt}^- = d_{kt}, \forall k = 1, \dots, 6, t \in T$$

- Proporciones de componentes mezcla: (0.4 puntos)

$$\sum_{e \in E} m_{eie'jt} = p_{ij} \left(\sum_{\substack{i'=1, \dots, 3, \\ e' \in E}} m_{ei'e'jt} \right), \quad \begin{matrix} \forall j=4, \dots, 6, i=1, \dots, 3, \\ t \in T, e' \in E \end{matrix}$$

- Conservación de flujo de componentes básicos: (0.5 puntos)

$$f_{ei(t-1)} + m_{ei(t-1)}^+ - m_{ei(t-1)}^- - \sum_{\substack{j=4, \dots, 6, \\ e' \in E}} m_{eie'j(t-1)} = f_{eit}, \quad \begin{matrix} \forall i=1, \dots, 3, \\ t \in T, e \in E \end{matrix}$$

- Conservación de flujo de componentes derivados: (0.5 puntos)

$$f_{ej(t-1)} - m_{ej(t-1)}^- + \sum_{\substack{i=1, \dots, 3, \\ e' \in E}} m_{e'iej(t-1)} = f_{ejt}, \quad \begin{matrix} \forall j=4, \dots, 6, \\ t \in T, e \in E \end{matrix}$$

- Naturaleza de las variables: (0.3 puntos)

$x_{ekt}, z_{it} \in \{0, 1\}; f_{ekt}, m_{eit}^+, m_{ekt}^-, m_{eie'jt} \geq 0$. Donde $k = 1, \dots, 6; i = 1, \dots, 3$ y $j = 4, \dots, 6$

Función Objetivo:

$$\min_{x, z, f, m} \sum_{\substack{i=1, \dots, 3, \\ t \in T}} \left(c_i^f z_{it} + \sum_{e \in E} c_i^v m_{eit}^+ \right) \quad (1 \text{ punto})$$

Dudas y/o consultas
Leonardo López H.
lelopez@ing.uchile.cl