Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A – Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Auxiliares: André Carboni
Leonardo López
Rodrigo Wolf

Auxiliar extra Examen
4 de Julio, 2008

Problema 1 – Compilado examenes

1. Explique qué significa que un problema de decisión pertenezca a P, qué significa que un problema de decisión pertenezca a NP y qué significa que un problema de decisión pertenezca a NP-completo.
2. Explique si puede o no tener utilidad ocupar el concepto de dualidad para resolver cada uno de los problemas lineales continuos que se van definiendo en el algoritmo de ramificación y acotamiento (Branch and Bound).
3. Explique qué es un algoritmo exacto y qué es una heurística para resolver un determinado problema. ¿En qué casos se debería usar cada uno? Relacione esta respuesta con lo estudiado sobre teoría de la complejidad computacional.
4. Muestre con un ejemplo por qu´e el algoritmo de Dijkstra para rutas más cortas puede no servir si hay arcos con costo negativo. Justifique.
5. Dado un problema de programaci´on dinámica, explique el significado de las variables de decisión, de las variables exógenas (parámetros) y de las variables de estado.

Pregunta 2 – CTP 4, 2006/1

La exitosa especuladora de Wall Street, Mari Ultz debe decidir que acciones dentro de las A disponibles comprara esta mañana en el vertiginoso mercado bursátil de New York.
Para esto, Mari cuenta con M unidades monetarias (U.M.) para invertir y sabe que una acción i cualquiera dentro de las A disponibles vale Pi U.M, ella también sabe que si compra n acciones de i recibirá un retorno de Rin U.M al final del día (por ejemplo si compra 2 acciones de la empresa i incurre en un costo de 2*Pi y obtiene ganancias de Ri2). En todo caso Ultz no compra más de N acciones de una misma empresa (es decir, puede llegar a comprar inclusive N acciones de una misma compañía).

1. Ayude a nuestra amiga mediante programación dinámica, formulando el modelo, a decidir cuantas acciones de cada empresa comprar, tenga presente que no es necesario que ella gaste todo el dinero y que lo que le sobra también vale para su utilidad.
2. Los siguientes son los datos que maneja Mari:

A=3, M=30, N=5, P1=P2=P3= 7

R_{10}	R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}
0	10	20	30	45	50
R_{20}	R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}
0	30	60	100	120	150
R_{30}	R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}
0	35	70	90	115	170

A partir de estos y apoyándose en lo hecho en a), resuelva explícitamente el problema y concluya que es lo que ella debe hacer y que utilidad le reportaría hacer esto.

Pregunta 3 – Examen, 2004/2:

La Asociación Nacional de Fútbol Profesional (ANFP) ha decidido contratar a dos prestigiosos consultores italianos en optimización, Alessandro Cassado y Paolo Reinetta, a fin de que mediante la utilización de modelos matemáticos diseñen el fixture (programa de enfrentamientos entre los equipos a lo largo del torneo) del Campeonato Apertura del fútbol chileno 2005.

Los datos que les hizo llegar la ANFP son los siguientes:
Disputarán el campeonato 20 equipos que se enfrentarán todos contra todos a lo largo de 19 fechas. Cada fecha consta de 10 partidos donde juegan los 20 equipos del torneo, y cada enfrentamiento entre dos equipos se da exactamente una vez a lo largo del campeonato.

- Cada equipo debe jugar 9 o 10 partidos en condición de local (y el resto de sus partidos en condición de visita).
- Cada equipo puede jugar a lo más 2 partidos consecutivos como local y 2 partidos consecutivos como visita.
- Cuando la Universidad de Chile juega de local, el Colo-Colo debe jugar como visita, y viceversa.
- Los clásicos (partidos entre sí de la Universidad de Chile, el Colo-Colo y la Universidad Católica) deben jugarse de la fecha 10 en adelante.

Además, se sabe que la fecha 4 y la fecha 12 serán las únicas que se disputarán en miércoles (y no en fin de semana) y que los equipos prefieren no jugar de local los días miércoles porque las recaudaciones bajan sensiblemente. Es por ello que Cassado y Reinetta han pensado en minimizar el número de equipos que juegan ambos miércoles en condición de local.
A pesar de sus conocimientos, los consultores no han podido resolver el problema y por ello le están solicitando ayuda a los alumnos del IN34A.

1. Diseñe un modelo de programación lineal entera que minimice el número de equipos que juegan ambos miércoles en condición de local, respetando las condiciones solicitadas por la ANFP.
2. ¿Cómo variaría el modelo si se le pide ahora que además de las condiciones mencionadas se incorpore una más que diga que obligatoriamente cada equipo debe jugar un miércoles de local y otro miércoles de visita? (o sea que cada equipo debe ser local en la fecha 4 y visita en la 12, o viceversa)

Solución:

Pregunta 1:

1.-

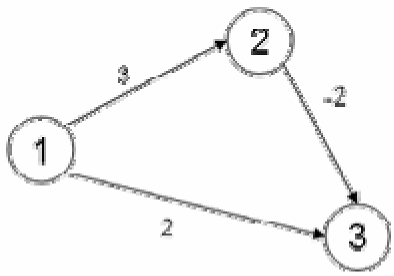
- Estar en P: Existe un algoritmo polinomial que lo resuelve.
- Estar en NP: Existe un algoritmo no determinístico polinomial que lo resuelve o que existe un certificado verificable en tiempo polinomial.
- Estar en NP-Completo: Está en NP y además todo problema en NP se puede transformar polinomialmente en él.

2.- Al definir problemas continuos se van agregando cotas (restricciones). Al mirar el problema dual, se puede observar que este aumenta en el número de variables. Es claro que resolver problemas con aumento de variables es menos trabajoso (en cuanto a la utilización de recursos) que resolver problemas con aumento de restricciones. Luego es de utilidad resolver el problema dual.

Otra respuesta válida es: Al ir agregando las restricciones que generan los nuevos nodos del árbol de B&B, la solución del nodo padre resulta ser infactible en los nodos hijos, por lo que no es posible partir de ella para seguir iterando utilizando simplex.
Sin embargo, al reconocer que la nueva restricción solo agrega una nueva variable en el problema dual, es evidente que la solución dual del nodo padre es factible en los problemas duales de los nodos hijos por lo que resulta natural utilizar el concepto de dualidad para resolver los problemas lineales que se van generando en las ramificaciones en el algoritmo B&B.

3.- Un algoritmo es una secuencia finita de pasos que garantiza el encontrar una solución de un problema para una instancia dada. La complejidad de un algoritmo varía, pero puede llegar a ser muy complejo e impracticable de resolver computacionalmente. Es por ello que para resolver problemas muy complejos es mejor utilizar una heurística, que si bien no asegura llegar al óptimo, obtiene buenas soluciones en un tiempo razonable. En general en problemas polinomiales se suele usar algoritmos exactos y en problemas NP-completos (sobre todo de gran dimensión) se suelen usar heurísticas.

4.- Si hay arcos con costo negativo hay casos en que el algoritmo de Dijkstra no encuentra la ruta más corta. Por ejemplo para el siguiente grafo, si se busca la ruta más corta del nodo 1 al nodo 3, Dijkstra encuentra que la ruta más corta es ir directamente del nodo 1 al 3 con costo 2. Sin embargo, existe una ruta de costo menor que es ir del nodo 1 al 2 y luego del nodo 2 al 3, con costo 1.



5.- Las variables de decisión son decisiones cuantificables cuyos valores se intenta determinar por medio de la resolucion del modelo. Su valor determina el valor de las variables de estado de las etapas futuras. Las variables de estado son variables que caracterizan la situacion en la que se encuentra el sistema en una etapa dada. Estas variables dan la independencia a la etapa actual de las etapas anteriores, por lo que deben existir tantas variables de estado como las que permitan establecer en que condiciones comienza (o finaliza) una etapa para su posterior optimizacion. Las variables exogenas o parametros representan los valores conocidos del sistema y se diferencian de las variables de decision en que no son controlables.

Pregunta 2:

1.-

Etapas:

1,…,A (las acciones)

Variables de Estado:

Y_a = Dinero disponible al inicio de la etapa a

Variable de decisión:

X_a= Número de acciones a comprar en la etapa a

Recurrencia

$Y_{a+1} = Y_a - X_a*P_a$

Función de Beneficio:

$V_a(Y_a,X_a) = R_{a,Xa} - X_a*P_a + V*_{a+1}(Y_{a+1})$

$V*_a(Y_a)$= Max $V(Y_a,X_a)$

s.a. $0 \leq X_a*P_a \leq Y_a$

$0 \leq X_a \leq N$

Nota: Vean la correccion con respecto a lo que hicimos en auxiliar. En la clase habiamos dicho que $V_a(Y_a,X_a) = R_{a,Xa} - X_a*P_a + Y_{a+1}$, lo cual es incorrecto ya que se perdería la recursividad de la función de beneficio. La función de beneficio siempre queda en función de sí misma en el período siguiente! Lo importante es definir bien las condiciones de borde, así tendremos el valor de $V*_{a+1}(Y_{a+1})$ para todo a=1,…,A. Esta corrección la notamos al resolver las tablas, cuando vimos que la tabla de A=2 dependía del resultado de la tabla de A=3, y no de la plata que me sobraba, se acuerdan?

Condiciones de Borde:

Y_1=M

$V_{A+1}=Y_A-X_{A*}P_A$ << *Esta representa que al final, la plata que me sobra funciona como beneficio.*

2.-

A=3

Y3-X3	0	1	2	3	4	5	V*	X*
30	30	28+23	56+16	69+9	87+2	-	89	4
23	23	28+16	56+9	69+2	-	-	71	3
16	16	28+9	56+2	-	-	-	58	2
9	9	28+2	-	-	-	-	30	1
2	2	-	-	-	-	-	2	0

A=2

Y2-X2	0	1	2	3	4	5	V*	X*
30	0+89	23+71	46+58	79+30	92+2	-	109	3
23	0+71	23+58	46+30	79+2	-	-	81	1 o 3
16	0+58	23+30	46+2	-	-	-	58	0
9	0+30	23+2	-	-	-	-	30	0
2	0+2	-	-	-	-	-	2	0

A=1

Y1-X1	0	1	2	3	4	5	V*	X*
30	0+109	3+81	6+58	9+30	17+2	-	109	0

Por lo tanto la solución (lo que debe hacer) es comprar 0 de 1; 3 de 2 y 1 de 3. Esto le genera una utilidad de 109.

Pregunta 3:

1.-

Variables de decisión:

X_{ijk} =1 si i juega contra j de local en la fecha k; 0 en caso contrario

Y_i = 1 si i juega sus dos partidos de local los miércoles; 0 en caso contrario

Restricciones:

1. Cada equipo juega una vez por fecha:

$$\sum_{j/j\neq i} Xijk + Xjik = 1 \qquad \forall i \qquad \forall k$$

2. Cada partido se disputa una vez en el torneo:

$$\sum_{k} (Xijk + Xjik) = 1 \qquad \forall i\neq j$$

3. Cada equipo tiene 9 o 10 localías por torneo:

$$9 <= \sum_{k,j\ (j\neq i)} Xijk <= 10 \qquad \forall i$$

4. Un equipo no puede jugar 3 seguidos de local:

$$\sum_{j/j\neq i} Xijk + \sum_{j/j\neq i} Xij(k+1) + \sum_{j/j\neq i} Xij(k+2) <= 2 \qquad \forall i\ \forall k$$

(Hacer lo mismo para visita…).

5. La U (1) y el Colo-Colo (2) no pueden ser simultáneamente locales:

$$\sum_{j\neq 1} X1jk + \sum_{j\neq 2} X2jk = 1 \qquad \forall k$$

(Hacer lo mismo para visita)

6. Los clásicos de la fecha 10 en adelante:

Xijk =0 para todo (i,j) formado por 2 de los 3 grandes y k<=9

7. Condición de variables Yi:

$$2^*Yi <= \sum_{j\neq i} Xij4 + \sum_{j\neq i} Xij12 <= 1 + Yi \qquad \forall i$$

8. Naturaleza de las variables:

$$X_{ijk}, Y_i \text{ en } \{0,1\}$$

Función objetivo:

$$\mathbf{Min} \sum_i Y_i$$

2.- Condición de miércoles: el que es local en la 4ª tiene que ser visitante en la 12ª

$$\sum_{j \neq i} X_{ij4} + \sum_{j \neq i} X_{ij12} = 1 \qquad \forall i$$

Retiro las variables Yi y la condición 7). Como busco ahora sólo una solución factible, en la función objetivo puedo poner cualquier cosa.

Dudas y/o comentarios a:
André Carboni
acarboni@ing.uchile.cl