Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A - Optimización

Profs: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Aux: Andre Carboni
Leonardo López
Rodrigo Wolf

Control 3

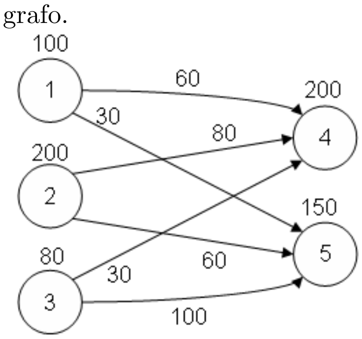
11 de Junio de 2008

Pregunta 1

1. (0.8 Ptos.) En el contexto de B&B, describa brevemente una forma de ramificar cuando la solución a un sub-problema lineal es fraccionaria.
2. (0.8 Ptos.) En el contexto de B&B, ¿Qué razones hay para no ramificar un sub-problema dado?
3. (0.8 Ptos.) De una condición suficiente para que el algoritmo de Dijkstra (como fue descrito en las transparencias) entregue la solución al problema de ruta más corta de un nodo a todo el grafo.
4. (0.8 Ptos.) De una cota de la complejidad que tiene el algoritmo de Dijkstra.
5. (1.2 Ptos.) Invente una instancia del problema de la mochila binario donde la solución óptima al problema sin restricciones de integralidad difiera al menos en dos variables de la solución óptima al problema binario.
6. (0.8 Ptos.) Dada la formulación como problema lineal entero del problema de la Ruta mas Corta, ¿De qué sirve saber que su matriz de incidencia es totalmente unimodular?
7. (0.8 Ptos.) Dado un grafo dirigido $G = (N, A)$, y $f : A \to \mathbb{R}_+$, ¿bajo qué condiciones es f un flujo en G?

Pregunta 2

1. (3 Ptos.) Una firma desea estudiar la capacidad máxima producción de su planta, la que es ilustrada a través del siguiente grafo.



La planta cuenta con tres estaciones de producción (nodos 1, 2 y 3) y dos estaciones de envasado (nodos 4 y 5). Cada estación de producción puede elaborar hasta 100, 200 y 80 [$unid/hora$] respectivamente y cada estación de envasado pueden procesar hasta 200 y 150 [$unid/hora$] respectivamente. Las unidades producidas en las estaciones de producción se trasladan a las estaciones de envasado a través de correas transportadoras, que se representan a través de arcos en el grafo. Cada correa posee una cantidad máxima de unidades por hora que es capaz de transportar, capacidad detallada en cada arco del grafo.

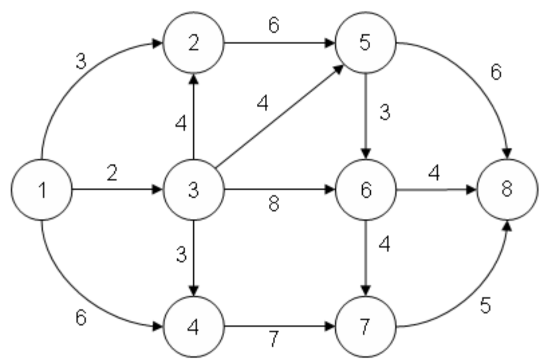
a) (2.4 Ptos.) Determine la máxima cantidad de unidades que la planta es capaz de producir y envasar en una hora. Para esto modifique el grafo dado para poder aplicar el algoritmo de Ford y Fulkerson y encontrar el flujo máximo.

b) (0.6 Ptos.) Cuando la capacidad de la planta se ve sobrepasada la firma maneja dos soluciones de contingencia:

- Aumentar en 30 [$unid/hora$] la capacidad de la correa tranportadora que va desde el nodo 2 al 5.
- Instalar una correa tranportadora con una capacidad de 50 [$unid/hora$] desde la estación de envasado 5 a la 6, que permita desviar unidades recibidas en 5 para que sean envasadas en 6.

Sin realizar nuevos cálculos, ¿Qué solución recomendaría para aumentar la capacidad de la planta cuando esta se vea sobrepasada? Justifique.

2. (3 Ptos.) En el siguiente grafo G desde cualquier nodo es posible encontrar una ruta hacia el nodo 8. Utilizando Dijkstra determine las rutas más cortas desde todos los nodos de G hasta el nodo 8. Puede ser eficiente modificar el grafo G y luego aplicar el algoritmo.



Pregunta 3

Conicyt[1] está organizando una actividad en un número importante de escuelas diseminadas por todo el país. Lo que se pretende es medir el radio de la Tierra y para ello los alumnos de dos escuelas socias (en pares a lo largo del pais) deben hacer ciertas mediciones en un mismo día durante el mediodía solar, de modo que por argumentos trigonométricos puedan deducir el radio terrestre.

Para facilitar las cuentas se pretende que las escuelas estén alejadas en latitud (norte-sur) y cercanas en longitud (este-oeste).

Tenemos N escuelas y queremos agrupar a todas con una o dos escuelas socias. Queremos que la latitud entre escuelas asociadas sea al menos de 400 km., y por otra parte nos gustaría que la longitud máxima entre escuelas asociadas sea lo más pequeña posible. Asuma como datos conocidos la latitud y longitud en kilómetros entre cada par de escuelas.

Diseñe un modelo de programación lineal entera mixta que le permita a Conicyt hacer la asignación de escuelas.

[1] Comisión Nacional de Investigación en Ciencia y Tecnología

Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A - Optimización

Profs: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Aux: Andre Carboni
Leonardo López
Rodrigo Wolf

Pauta Control 3

11 de Junio de 2008

Pregunta 1

1. (0.8 Ptos.) Consideremos un (PE) estándar con un conjunto factible acotado. Sea (P_0) la relajación lineal de (PE), $R_0 = \{Ax \leq b, x_j \forall j\}$ su conjunto factible y x^0 una solución óptima de (P_0). Si existe una variable k tal que $x_k^0 \notin \mathbb{N}$, es posible utilizarla para ramificar (P_0) en dos problemas:

$$\begin{array}{llcll} (P_0^+) & z_0^+ = \min c^T x & \quad & (P_0^-) & z_0^- = \min c^T x \\ s.a. & x \in R_0^+ & & s.a. & x \in R_0^- \end{array}$$

donde:

$$\begin{aligned} R_0^+ &= R_0 \cap \{x / x_k \geq \lfloor x_k^0 \rfloor + 1\} \\ R_0^- &= R_0 \cap \{x / x_k \leq \lfloor x_k^0 \rfloor\} \end{aligned}$$

La solución óptima x^* de (PE) debe estar en R_0^+ o en R_0^- pues x_k^* debe ser entera. Luego, es posible resolver (P_0^+) y (P_0^+), realizar el mismo análisis anterior para los nuevos problemas e ir construyendo el árbol de B&B.

2. (0.8 Ptos.)
   - El nodo generó un problema infactible.
   - La solución del problema en ese nodo es entera.
   - La solución del problema en ese nodo es fraccionaria pero es "peor"que alguna entera que ya ha sido obtenida (el valor de la incumbente).

3. (0.8 Ptos.) El algoritmo necesita un grafo orientado y el valor de los costos positivo para entregar un árbol de caminos mínimos para ir desde un nodo inicial al resto de los nodos del grafo.

4. (0.8 Ptos.) $O(n^2)$.

5. (1.2 Ptos.) Consideremos la siguiente instancia del problema de la mochila binario:

$$\begin{array}{rl} \max & z = 100x_1 + 20x_2 + 30x_3 \\ s.a. & 50x_1 + 20x_2 + 20x_3 \leq 45 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{array}$$

Los productos que entreguen el mayor beneficio (supongamos \$) por unidad de espacio utilizado (supongamos m^3), entran a la mochila con mayor prioridad.

	x_1	x_2	x_3
$\$$	100	20	30
m^3	50	20	20
$\$/m^3$	2	1	1,5

Es decir, primero se intenta agregar el producto 1, luego el 3 y finalmente el 2. En el caso binario, como el espacio utilizado por el producto 1 es mayor que la capacidad de la mochila este no entra ($x_1 = 0$), pero si entra el producto 3 ($x_3 = 1$) y el producto 2 ($x_2 = 1$). En el caso relajado se permite agregar fracciones de los productos a la mochila. Primero se intenta agregar lo más posible del producto 1. Como la capacidad de la mochila es 45 y el producto 1 ocupa un espacio de 50, solo se puede agregar una fracción de 45/50 unidades del producto 1 ocupando toda la capacidad de la mochila. Luego la solución del problema relajado es $x_1 = 45/50$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$. Para esta instancia las soluciones del problema binario y relajado difieren en las 3 variables.

6. (0.8 Ptos.) Como el vector de divergencias en el problema de la ruta más corta es entero (1 para el nodo inicial, -1 para el nodo final y 0 para el resto), saber que la matriz de incidencia es totalmente unimodular permite relajar las restricciones de binariedad $x_{ij} \in \{0,1\}$ (sustituyéndolas por $0 \leq x_{ij} \leq 1$) y obtener de todos modos una solución optima binaria al resolver el problema relajado.

7. (0.8 Ptos.) Suponiendo que no hay restricciones sobre el flujo que puede pasar por los arcos y nodos del grafo G, f es un flujo en G si se satisface la condición de conservación de flujo en todos los nodos del grafo:

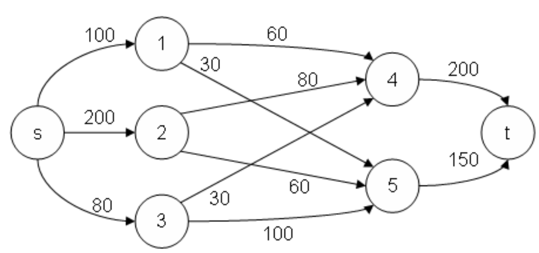
$$\sum_{\{j/(i,j)\in A\}} f_{ij} - \sum_{\{k/(k,i)\in A\}} f_{ki} = q_i \quad \forall i \in N$$

donde q_i es la divergencia del nodo $i \in N$, que debe satisfacer que: $\sum_{i\in N} q_i = 0$.

Nota: Basta con suponer que $q_i = 0 \quad \forall i \in N$.

Pregunta 2

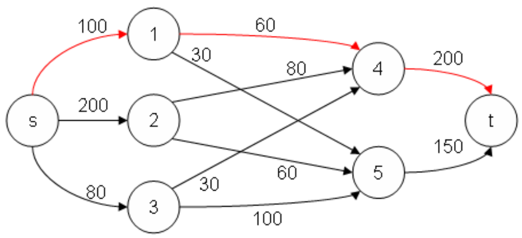
1. *a*) Para aplicar F&F se requiere un grafo orientado, con capacidades en los arcos, para llevar flujo desde un nodo inicial a uno final. Al grafo dado se debe agregar un nodo inicial s y otro final t. Desde s a cada estación de producción se agregan arcos con capacidad superior igual a la capacidad de producción de la respectiva estación. Desde cada estación de envasado a t se agregan arcos con capacidad superior igual a la capacidad de envasado de la respectiva estación. Las capacidades inferiores de todos los arcos del nuevo grafo se definen como cero. El grafo G al que podemos aplicar F&F entonces queda:



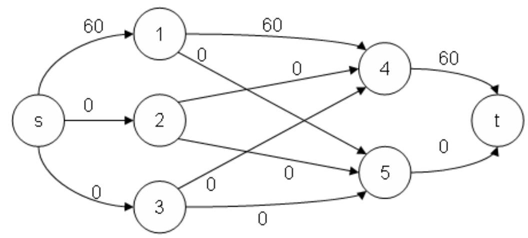
Como las capacidades mínimas son cero en todos los arcos, flujo cero en todos los arcos es una solución factible del problema de flujo máximo.

Iteración 1:

G' :



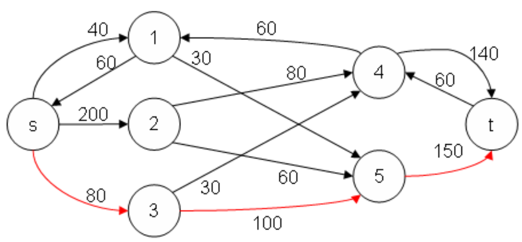
G :



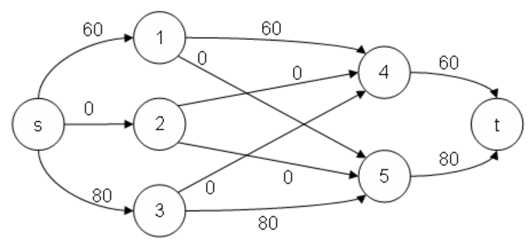
Tomando el camino $C' = s{-}1{-}4{-}t$, tenemos que $\epsilon = 60$. Los flujos que debemos actualizar son: $f_{s1} = f_{14} = f_{4t} = 60$ y $F = 60$.

Iteración 2:

G' :



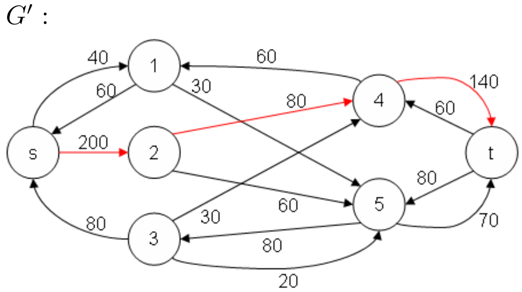
G :



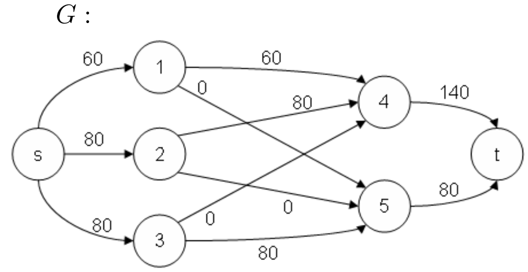
Tomando el camino $C' = s{-}3{-}5{-}t$, tenemos que $\epsilon = 80$. Los flujos que debemos actualizar son: $f_{s3} = f_{35} = f_{5t} = 80$ y $F = 140$.

Iteración 3:

G' :



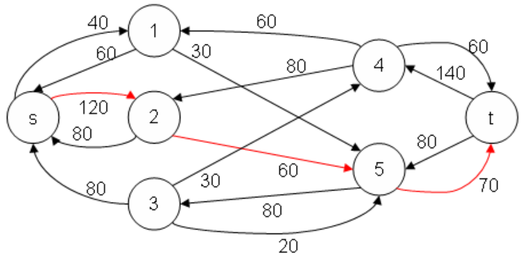
G :



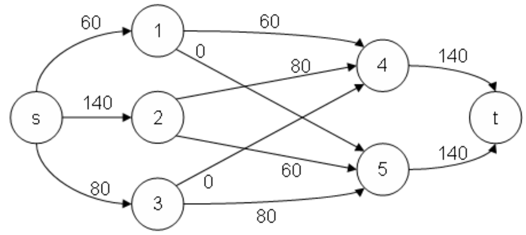
Tomando el camino $C' = s{-}2{-}4{-}t$, tenemos que $\epsilon = 80$. Los flujos que debemos actualizar son: $f_{s2} = f_{24} = 80$ y $f_{4t} = 140$ y $F = 220$.

Iteración 4:

G' :



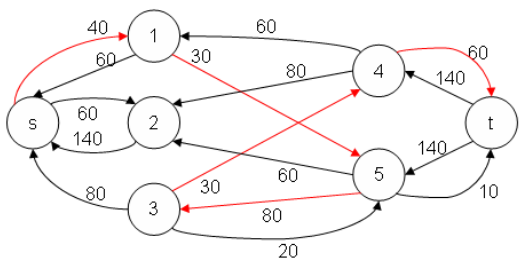
G :



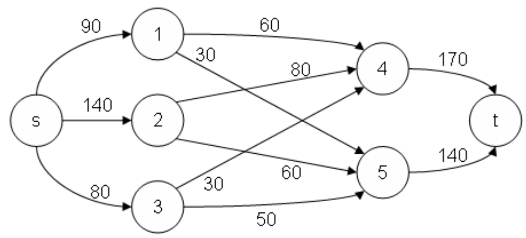
Tomando el camino $C' = s-2-5-t$, tenemos que $\epsilon = 60$. Los flujos que debemos actualizar son: $f_{s2} = 140$, $f_{25} = 60$, $f_{5t} = 140$ y $F = 280$.

Iteración 5:

G' :



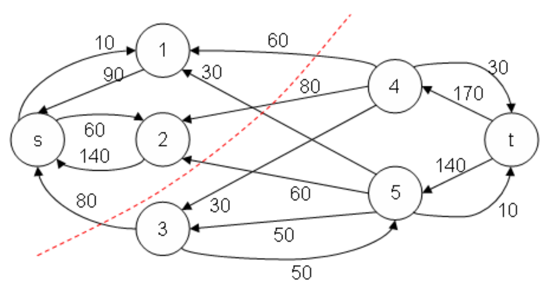
G :



Tomando el camino $C' = s-1-5-3-4-t$, tenemos que $\epsilon = 30$. Los flujos que debemos actualizar son: $f_{s1} = 90$, $f_{15} = 30$, $f_{53} = 50$, $f_{34} = 30$, $f_{4t} = 170$ y $F = 310$.

Iteración 6:

G' :



No existen caminos aumento de s a t en G'. Por lo tanto, el flujo máximo es $F^* = 310$.

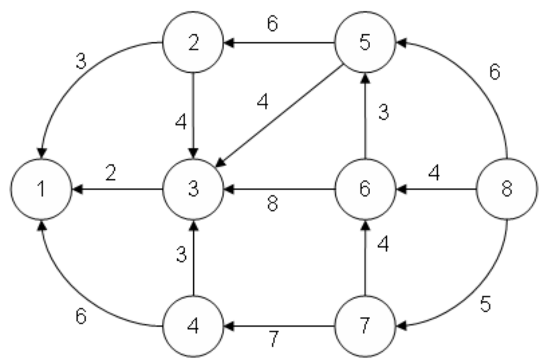
b)
- La primera es una buena alternativa por si sola pues aumenta la capacidad precisamente donde se encuentra un corte de capacidad mínima[2]. Si se toma esta opción es posible aumentar el flujo máximo desde s a t.
- La segunda no es una buena alternativa por si sola pues aumenta la capacidad en donde aún hay holgura de capacidad. Esto pues aún es posible llevar más flujo desde 5 a t, pero no hay forma de llevar más flujo desde s hasta 5.

[2]Podemos identificar que un corte $Q = [S, N \setminus S]$ de capacidad mínima está dado por los conjuntos $S = \{s, 1, 2\}$ y $N \setminus S = \{3, 4, 5, t\}$.

- Si se toma la primera opción es posible aumentar el flujo máximo en 10 unidades. Si además se toma la segunda opción es posible aumentar el flujo máximo en otras 20 unidades. Luego, tomar ambas opciones también es una buena alternativa.

2. La forma más eficiente de resolver el problemas es invertir todos los arcos de grafo conservando sus costos. Si sobre este grafo modificado aplicamos Dijkstra desde 8, encontraremos el árbol de rutas más cortas desde 8 al resto de los nodos. Luego invirtiendo el resultado tendremos las rutas más cortas desde todos los nodos hasta 8.

   Invirtiendo el grafo inicial:

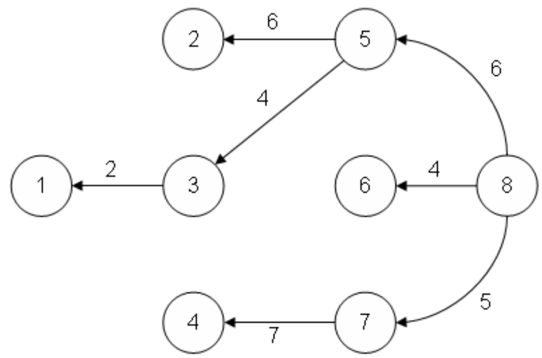
   

   Aplicando Dijkstra:

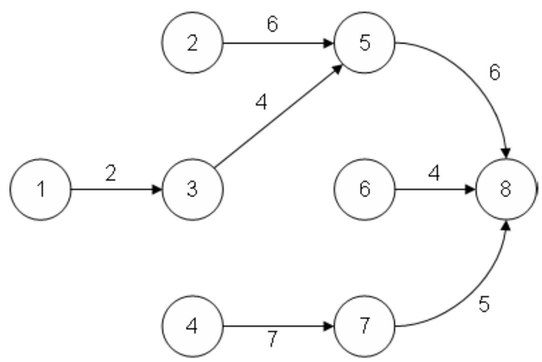
   - Inicialización:
     $S = \emptyset, \pi(8) = 0, \pi(i) = +\infty \quad \forall i \in N \setminus \{8\}$.
   - Iteración 1:
     $j = 8 \Rightarrow S = \{8\}$.
     $\pi(5) = +\infty > \pi(8) + l(8,5) = 0 + 6 \Rightarrow \pi(5) = 6, P(5) = 8$.
     $\pi(6) = +\infty > \pi(8) + l(8,6) = 0 + 4 \Rightarrow \pi(6) = 4, P(6) = 8$.
     $\pi(7) = +\infty > \pi(8) + l(8,7) = 0 + 5 \Rightarrow \pi(7) = 5, P(7) = 8$.
   - Iteración 2:
     $j = 6 \Rightarrow S = \{6,8\}$.
     $\pi(3) = +\infty > \pi(6) + l(6,3) = 4 + 8 \Rightarrow \pi(3) = 12, P(3) = 6$.
   - Iteración 3:
     $j = 7 \Rightarrow S = \{6,7,8\}$.
     $\pi(4) = +\infty > \pi(7) + l(7,4) = 5 + 7 \Rightarrow \pi(4) = 12, P(4) = 7$.
   - Iteración 4:
     $j = 5 \Rightarrow S = \{5,6,7,8\}$.
     $\pi(2) = +\infty > \pi(5) + l(5,2) = 6 + 6 \Rightarrow \pi(2) = 12, P(2) = 5$.
     $\pi(3) = 12 > \pi(5) + l(5,3) = 6 + 4 \Rightarrow \pi(3) = 10, P(3) = 5$.
   - Iteración 5:
     $j = 3 \Rightarrow S = \{3,5,6,7,8\}$.
     $\pi(1) = +\infty > \pi(3) + l(3,1) = 10 + 2 \Rightarrow \pi(1) = 12, P(1) = 3$.
   - Iteración 6:
     $j = 2 \Rightarrow S = \{2,3,5,6,7,8\}$.
     $\pi(1) = 12 \not> \pi(2) + l(2,1) = 12 + 3$.

- Iteración 7:
  $j = 4 \Rightarrow S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
  $\pi(1) = 12 \not> \pi(4) + l(4, 1) = 12 + 6$.
- Iteración 8:
  $j = 1 \Rightarrow S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = N$.

El árbol de rutas más cortas es:



Invirtiendo los arcos a su sentido original se obtienen las rutas más cortas desde todos los nodos de G hasta 8:



Pregunta 3

Variables de decisión (1 punto)

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si la escuela } i \text{ es socia de la escuela } j \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Con $i < j$, $i = 1, \ldots, N - 1$. (0.6 puntos)

B = Diferencia de longitud mayor entre escuelas socias. (0.4 puntos)

Restricciones

1. Cada escuela tiene una o dos escuelas socias (2 puntos):

$$1 \leq \sum_{j=2}^{N} x_{1j} \leq 2 \tag{1}$$

$$1 \leq \sum_{k=1}^{i-1} x_{ki} + \sum_{j=i+1}^{N} x_{ij} \leq 2 \quad i = 2, \ldots, N-1 \tag{2}$$

$$1 \leq \sum_{k=1}^{N-1} x_{kN} \leq 2 \tag{3}$$

2. Latitud entre escuelas asociadas (1 punto):

$$lat_{ij} \geq 400 \cdot x_{ij} \quad i = 1, \ldots, N-1; j = i+1, \ldots, N \tag{4}$$

3. Definición de la variable auxiliar B (1 punto):

$$x_{ij} \cdot long_{ij} \leq B \quad i = 1, \ldots, N-1; j = i+1, \ldots, N \tag{5}$$

4. Naturaleza de las variables (0.4 puntos):

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \ldots, N-1; j = i+1, \ldots, N \tag{6}$$

$$B \geq 0 \tag{7}$$

Función Objetivo (0.6 puntos)

$$\text{mín} \quad z = B \tag{8}$$

Nota: Alternativamente la variable x_{ij} podría haberse definido para todo $i, j = 1, \ldots, N$ y las restricciones (1), (2) y (3) podrían escribirse como las siguientes:

$$1 \leq \sum_{j=1; j \neq i}^{N} x_{ij} \leq 2 \quad i = 1, \ldots, N \tag{9}$$

$$x_{ij} = x_{ji} \quad i = 1, \ldots, N; j = 1, \ldots, N; i \neq j \tag{10}$$

Si se consideraran los casos x_{ii} en la suma de (9) y en las restricciones (10), habría que imponer que $x_{ii} = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, N$. Sin embargo, no es necesario hacerlo pues la restricción (4) lo hace, al hacer infactible todos los casos $x_{ii} = 1$.

Dudas y/o consultas
Leonardo López H.
lelopez@ing.uchile.cl