Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A – Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Auxiliares: André Carboni
Leonardo López
Rodrigo Wolf

Auxiliar Extra Programación Dinámica

23 de Junio de 2008

Problema 1

Una empresa de tele ventas posee 4 centros de llamado ya funcionando y 4 telefonistas nuevos que quiere asignar a dichos centros. Se hizo un estudio de mercado y se determinó el número estimado de clientes adicionales por mes al asignar los telefonistas a los centros. La siguiente tabla muestra el resultado de este estudio:

	1 telefonista	2 telefonistas	3 telefonistas	4 telefonistas
Centro 1	10	15	20	25
Centro 2	5	6	7	8
Centro 3	15	16	17	18
Centro 4	18	20	22	23

Por ejemplo asignar 2 telefonistas al centro 1 genera 15 clientes adicionales por mes.

a) Trate de reducir la complejidad del problema aplicando un análisis previo. Justifique su decisión.
b) Resuelve el problema simplificado aplicando programación dinámica. Si no logra simplificar el problema, resuelva el problema original aplicando programación dinámica (Identifique estados, etapas, variables de decisión, la función de transformación y la función de recursión).
c) ¿Cuál(es) es (son) la(s) política(s) óptima(s)?

Problema 2

Durante el mes t ($t=1,...,T$) una botillería se enfrenta a una demanda de d_t unidades de su producto artesanal "Pistol-Cola". El costo de los insumos para producir tan singular brebaje durante el mes t tiene dos componentes: Primero, se incurre en un costo de $c_t(x_t)$ si se producen x_t unidades en el mes t. Segundo, si el nivel de producción de la empresa durante el mes $t-1$ es x_{t-1} y el nivel de producción durante el mes t es x_t, entonces se incurrirá durante el mes t en un costo de suavizamiento o atenuación igual a $A\cdot|x_t - x_{t-1}|$. Al final de cada mes se incurre en un costo de almacenamiento de h_t, por unidad. Adicionalmente se incurre en un costo de I_t por cada unidad de demanda insatisfecha durante el mes t, la cual se desplazará para el mes siguiente, es decir, si se tienen y clientes insatisfechos el mes t, la demanda en el mes $t+1$ será $d_{t+1}+y$. El costo de terminar el período de planificación con algún cliente insatisfecho es "muy alto". Se sabe que inicialmente se cuenta con un inventario de K productos y que la producción del mes 0 fue x_0.

Plantee un modelo de programación dinámica que permita a la empresa maximizar las ganancias en los próximos T meses.

Problema 3

Un prestigioso taller mecánico, especialista en mantención y reparación de motores, tiene una máquina especializada para estos fines y desea saber cuando cambiar dicha máquina.
Para ello cuenta con los siguientes datos

- Una máquina nueva cuesta $C[u.m.]$.
- El taller puede mantener una máquina por 1, 2 o 3 años.
- Una máquina con i años de uso puede ser vendida en el mercado en $v_i[u.m.]$
- El costo anual de mantención de una máquina con i años de uso es $m_i[u.m.]$.

El taller busca una política óptima de reemplazo que minimice los costos totales durante los 5 años, restringidos a que siempre debe haber una máquina. Asuma que se compró una máquina el año 1 y que se venderá, sí o sí, al final del año 5.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A – Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Auxiliares: André Carboni
Leonardo López
Rodrigo Wolf

Pauta Auxiliar N°7

18 de Junio de 2008

Problema 1

a) Reducir la simplicidad del problema se puede a simple vista, por ejemplo, se ve que si se asigna las cuatro telefonistas a un solo centro el máximo de beneficio será 25, lo que es menos que el beneficio obtenido al poner una telefonista en cada centro que es de 48, así, inmediatamente se elimina la opción de tener cuatro telefonistas en un solo centro.
Igualmente se que el máximo que se puede obtener con tres telefonistas es 22+15 < 48 en el caso de ver tener 3 telefonistas en el centro 4 y una en el centro 3 o 20+18 < 38 en el caso de poner 3 telefonistas en el centro 1 y 1 en el centro 4. Lo anterior se observa fácilmente mirando los máximos en cada columna.
Se hace notar que a simple vista pareciera cómo que hay que eliminar el centro 2, pero si se pone atención, se observa que con la eliminación de este centro elimina la posibilidad de tener una telefonista en cada centro, opción que da un beneficio alto observado a simple vista.
Se simplifica el problema entonces eliminado las opciones con 3 y 4 telefonistas por centro.

b)

<u>Etapas:</u>
i =1,2,3,4. Cada centro.

<u>Variables de Estado:</u>
S_i= Cantidad de telefonistas disponibles para el centro i

<u>Variables decisión:</u>
X_i= Cantidad de telefonistas asignadas al centro i.

<u>Función Recursión:</u>
$S_{i+1} = S_i - X_i$

<u>Condición de Borde:</u>
$S_1=4$
$V^*_5(S_5)=0$

<u>Función Beneficio:</u>

Si se denomina $P_i(X_i)$ a el beneficio que da poner telefonistas en el centro i, valores que están dados en las tablas mostradas en el enunciado se tiene que:

$$V_i(S_i, X_i)= P_i(X_i) + V^*_{i+1}(S_i - X_i)$$

Donde $$V_{i+1}^*(S_i - X_i) = V_{i+1}^*(S_{i+1}) = \max_{0 \le X_{i+1} \le S_{i+1}} V_{i+1}(S_{i+1}, X_{i+1})$$

Resolviendo:

Centro 4:

S	X 0	1	2	X*	V*
1	0	18	-	1	18
2	0	18	20	2	20
3	0	18	20	2	20
4	0	18	20	2	20

Centro 3:

S	X 0	1	2	X*	V*
1	18	15	-	0	18
2	20	33	16	1	33
3	20	35	34	1	35
4	20	35	36	2	36

Centro 2:

S	X 0	1	2	X*	V*
1	18	5	-	0	18
2	33	23	6	0	33
3	35	38	24	1	38
4	36	40	39	1	40

Centro 1:

S	X 0	1	2	X*	V*
4	40	48	48	1, 2	48

c)

Así existen dos políticas óptimas:

i	Xi Política 1	Política 2
Centro 1	1	2
Centro 2	1	0
Centro 3	1	1
Centro 4	1	1
Beneficio	**48**	**48**

Problema 2

- Etapas: Meses en el estudio: t=1,2,3,...,T
- Variables de Decisión: X_t = Cantidad a producir en el mes t.
  Y_t = Cantidad de personas a dejar insatisfechas en el mes t.
- Variables de Estado: S_t = Inventario a comienzos del mes t.
  R_t = Producción del mes anterior.
  D_t = Demanda real a enfrentar en t.

- Recurrencias: $S_{t+1} = S_t + X_t - (D_t - Y_t)$
  $R_{t+1} = X_t$
  $D_{t+1} = d_{t+1} + Y_t$
- Beneficio Acumulado:

$$V_t(S_t, R_t, D_t, X_t, Y_t) = -C(X_t) - A \cdot \left| X_t - R_t \right| - h_t \cdot (X_t + S_t - (D_t - Y_t)) - I_t \cdot Y_t + V_{t+1}^{\ *}(S_{t+1}, R_{t+1}, D_{t+1})$$

- Beneficio Máximo:

$$V_t^{\ *}(S_t, R_t, D_t) = \max_{X_t, Y_t} V_t(S_t, R_t, D_t, X_t, Y_t)$$

s.a.

$X_t \geq 0$ (Producción Positiva)

$D_t \geq Y_t \geq 0$ (No más insatisfechos que demanda real)

$S_t + X_t \geq D_t - Y_t$ (Oferta mayor que demanda)

- Condiciones de Borde:

$$V_{T+1}^*(S_{T+1}, R_{T+1}, D_{T+1}) = \begin{cases} 0 & si \quad D_{T+1} = 0 \\ -\infty & si \quad D_{T+1} > 0 \end{cases}$$

$$S_1 = K$$

$$R_1 = x_0$$

$$D_1 = d_1$$

Y además es necesario definir el parámetro $d_{T+1} = 0$ para que la variable de estado D_{T+1} quede bien definida.

Problema 3

- Etapas: Años del horizonte: t=0,1,2,3,4,5.
- Variable de Decisión: X_t $\begin{cases} \text{Si cambio la máquina en t} \\ \text{Si no} \end{cases}$
- Variable de Estado: S_t = Edad de la máquina en t.
- Recurrencia: $S_{t+1} = (S_t + 1)(1-X_t) + X_t$

Se tiene que:

- En t=0 hay que comprar obligatoriamente.
- En t=5 hay que vender obligatoriamente.
- El espacio de edades posibles varía dependiendo de cada etapa, siempre considerando que no puede ser mayor que 3.

Se define:

$V_t(S_t)$= Costo de la política óptima desde t, hasta el final, dado que la edad de la máquina en t es S_t.

Con esto, lo que se quiere determinar es $V_0(S_0)$.

En general:

$$V_t(S_t, X_t) = C \cdot X_t + m_{S_t} - v_{S_t} \cdot X_t + V_{t+1}^{\ *}(S_{t+1})$$

$$V_t^*(S_t) = \min V_t(S_t, X_t)$$

$$s.a. \quad S_{t+1} \leq 3$$

Condiciones de borde:

$$V_5^*(S_5) = m_{S_5} - v_{S_5}$$
$$V_0^*(S_0) = C + V_1^*(S_1)$$
$$S_0 = 0$$

Alternativamente, podría detallarse por cada año:

- Año 5:

$$V_5^{\ *}(S_5) = m_{S_5} - v_{S_5}$$

- Año 4:

$$V_4^{\ *}(3) = C + m_3 - v_3 + V_5^{\ *}(1)$$

$$V_4^*(2) = \begin{cases} C + m_2 - v_2 + V_5^*(1) & \text{Si cambio} \\ m_2 + V_5^*(3) & \text{Si no} \end{cases}$$

$$V_4^*(1) = \begin{cases} C + m_1 - v_1 + V_5^*(1) & \text{Si cambio} \\ m_1 + V_5^*(2) & \text{Si no} \end{cases}$$

- Año 3:

$$V_3^*(3) = C + m_3 - v_3 + V_4^*(1)$$

$$V_3^*(2) = \begin{cases} C + m_2 - v_2 + V_4^*(1) & \text{Si cambio} \\ m_2 + V_4^*(3) & \text{Si no} \end{cases}$$

$$V_3^*(1) = \begin{cases} C + m_1 - v_1 + V_4^*(1) & \text{Si cambio} \\ m_1 + V_4^*(2) & \text{Si no} \end{cases}$$

- Año 2:

$$V_2^*(2) = \begin{cases} C + m_2 - v_2 + V_3^*(1) & \text{Si cambio} \\ m_2 + V_3^*(3) & \text{Si no} \end{cases}$$

$$V_2^*(1) = \begin{cases} C + m_1 - v_1 + V_3^*(1) & \text{Si cambio} \\ m_1 + V_3^*(2) & \text{Si no} \end{cases}$$

- Año 1:

$$V_1^*(1) = \begin{cases} C + m_1 - v_1 + V_2^*(1) & \text{Si cambio} \\ m_1 + V_2^*(2) & \text{Si no} \end{cases}$$

- Año 0

$$V_0^*(0) = C + V_1^*(1)$$