



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A – Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Auxiliares: André Carboni
Leonardo López
Rodrigo Wolf

Auxiliar N°7

18 de Junio de 2008

Problema 1

En una popular comuna el alcalde está bastante preocupado por la seguridad ciudadana, por lo que ha decidido implementar un curioso sistema de botones de pánico, a través de los cuales la amedrentada población podrá pedir ayuda en caso de emergencia.

Después de grandes esfuerzos por conseguir presupuesto, el alcalde cuenta con un capital que le permite instalar un máximo de K botones, los cuales debe distribuir en los M barrios de su comuna (con $K > M$).

Según el experimentado equipo de asesores del edil, que ya piensan en la reelección, si en el barrio m se instalan k botones, el alcalde ganará $P_m(k)$ votos adicionales.

Suponga que es contratado para determinar la asignación que maximiza la cantidad de votos que conseguirá el alcalde en la próxima elección, producto de su campaña de seguridad ciudadana.

- ¿Por qué este problema es susceptible a ser abordado por un enfoque de programación dinámica?
- Modele el problema usando programación dinámica determinística, explicitando claramente las etapas, variables de decisión, variables de estado y funciones de beneficio.

Suponga ahora que si en un barrio m , se instalan más de U_m botones, la oposición al alcalde lo acusará públicamente de populista y derrochador. Esto implica una pérdida de r_m votos por cada botón por sobre U_m , instalado en esta zona.

Por otra parte, si en el barrio m se asignan menos de L_m aparatos de emergencia, la junta de vecinos del sector también iniciará una campaña de desprestigio que implica la pérdida de t_m sufragios por cada botón por debajo de L_m .

- Modele el nuevo escenario, usando programación dinámica determinística.

Problema 2

El Gerente Comercial de una compañía está estudiando la introducción de nuevos productos para la próxima temporada, por lo que debe decidir qué productos comercializar y cuántas unidades de c/u producir.

La producción de cada uno de estos productos, según lo informado por el Gerente de Operaciones, tiene asociado un costo fijo que depende del tipo de producto, igual a C_i . Además, la producción de cada unidad de producto i requiere utilizar un porcentaje de la capacidad disponible en la planta igual a K_i . Suponga que no existen otros costos de producción.

Por otra parte, dadas las condiciones de mercado, sabe que sus ingresos por unidad vendida serán U_i y que el mercado a lo más comprará D_i unidades del producto i elaborado por la compañía.

- Plantee el modelo de programación dinámica que apoye las decisiones de producción para el problema general descrito, si se busca maximizar las utilidades de la firma.

Supongamos ahora que los productos en evaluación son 3 y que se cuenta con la siguiente información relevante:

	P 1	P 2	P 3
Costo fijo	3	2	0
Ingreso por unidad vendida	2	3	1
% de capacidad usada por cada unidad	20	40	20

Como se ve en la primera fila de la tabla anterior, el gerente sabe que 2 de estos productos requieren un costo fijo importante. También conoce el ingreso que recibirá la empresa por cada unidad producida, una vez que la producción está en marcha. Además, como se ve en la tercera fila de la tabla, se sabe el porcentaje de capacidad disponible que ocupa cada unidad de producto al ser fabricada. Por condiciones del mercado se sabe que se pueden vender sólo 3 unidades de producto 1, mientras que es posible vender todas las unidades que se puedan fabricar de los otros productos.

- b) En esta situación resuelva, ocupando el modelo de programación dinámica planteado en la parte anterior, la estrategia de producción óptima.

Problema 3

Una línea aérea tiene 4 vuelos diarios a un destino determinado y en total 14 tripulantes disponibles para estos vuelos.

Por ley cada vuelo tiene que tener por lo menos 2 tripulantes; si se le asigna más tripulantes sube el beneficio para los pasajeros.

La siguiente tabla muestra el beneficio adicional de dicha asignación.

	3 tripulantes	4 tripulantes	5 tripulantes	6 tripulantes	7 tripulantes	8 tripulantes
Vuelo 1	15	18	20	25	27	30
Vuelo 2	16	20	21	22	28	29
Vuelo 3	17	18	19	23	29	29
Vuelo 4	6	9	10	12	13	14

Por ejemplo asignar 3 tripulantes al vuelo 2 genera un beneficio adicional de 16.

El problema consiste en determinar una asignación que maximice el beneficio adicional.

- Trate de reducir la complejidad del problema aplicando un análisis previo. Justifique su decisión.
- Resuelva el problema simplificado aplicando programación dinámica. Si no logra simplificar el problema resuelva el problema original aplicando programación dinámica.
- Identifique estados, etapas, variables de decisión, la función de transformación y la función de recursión.
- ¿Cuál(es) es (son) la(s) política(s) óptima(s)?



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A – Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Auxiliares: André Carboni
Leonardo López
Rodrigo Wolf

Pauta Auxiliar N°7 18 de Junio de 2008

Problema 1

- a) En este punto se deben incluir argumentos como: Existe un conjunto de decisiones interrelacionadas, si se modelan adecuadamente las etapas se tendrá que la decisión para una de ellas es independiente de decisiones pasadas y sólo dependerá de variables de estado, etc.
- b) De acuerdo al procedimiento usual para definir un modelo de programación dinámica se tendrá:

- **Etapas:**
Cada uno de los barrios, $m : 1, \dots, M$.
- **Variables de estado:**
 S_m , el número de botones restantes en la etapa m (sin asignar).
- **Variables de decisión:**
 X_m , el número de botones asignados al barrio m .
- **Recurrencia de estados:**

$$S_{m+1} = S_m - X_m$$

- **Función de beneficios:**

$$V_m(S_m, X_m) = P_m(X_m) + V_{m+1}^*(S_m - X_m)$$

Donde:

$$V_m^*(S_m) = \max_{X_m \leq S_m} \{V_m(S_m, X_m)\}$$

- **Condiciones de borde:**

$$V_{M+1}^*(\%) = 0$$
$$S_1 = K$$

- c) Al igual que en el punto anterior se tendrá que:

- **Etapas:**
Cada uno de los barrios, $m : 1, \dots, M$.
- **Variables de estado:**
 S_m , el número de botones restantes en la etapa m (sin asignar).
- **Variables de decisión:**
 X_m , el número de botones asignados al barrio m .
- **Recurrencia de estados:**

$$S_{m+1} = S_m - X_m$$

- **Función de beneficios:**

$$V_m(S_m, X_m) = P_m(X_m) - r_m \cdot \max\{0, X_m - U_m\} - t_m \cdot \max\{0, L_m - X_m\} + V_{m+1}^*(S_m - X_m)$$

Donde:

$$V_m^*(S_m) = \max_{X_m \leq S_m} \{V_m(S_m, X_m)\}$$

- Condiciones de borde:

$$\begin{aligned} V_{M+1}^*(\%) &= 0 \\ S_1 &= K \end{aligned}$$

Problema 2

a)

- Etapas: Productos: $n=1,2,3,\dots,N$
- Variables de Decisión: X_t = Unidades de producto n a producir.

$$Y_t \begin{cases} \text{Si se fabrica producto } n \\ \text{Si no} \end{cases}$$

- Variables de Estado: S_n = % de la capacidad total disponible para producir producto n .
- Recurrencias: $S_{n+1} = S_n - K_n \cdot X_n$
- Beneficio Acumulado:

$$V_n(S_n, X_n, Y_n) = U_n \cdot X_n - C_n \cdot Y_n + V_{n+1}^*(S_{n+1})$$

- Beneficio Máximo:

$$V_n^*(S_n) = \max_{\substack{X_n, Y_n \\ s.a. 0 \leq X_n \leq \min(\frac{S_n}{K_n}, D_n) Y_n}} V_n(S_n, X_n, Y_n)$$

- Condición de Borde:

$$\begin{aligned} S_1 &= 100 \\ V_{N+1}^* &= 0 \end{aligned}$$

b)

Producto 3:

S_3/X_3	0	1	2	3	4	5	$V_3[S_3]$	X_3^*
100 %	0	1	2	3	4	5	5	5
80 %	0	1	2	3	4		4	4
60 %	0	1	2	3			3	3
40 %	0	1	2				2	2
20 %	0	1					1	1
0 %	0						0	0

Producto 2:

S_2/X_2	0	1	2	$V_2[S_2]$	X_2^*
100 %	5	4	5	5	0-2
80 %	4	3	4	4	0-2
60 %	3	2		3	0
40 %	2	1		2	0
20 %	1			1	0
0 %	0			0	0

Producto 1:

S_1/X_1	0	1	2	3	$V_1[S_1]$	X_1^*
100%	5	3	4	5	5	0-3

Por lo tanto existen 3 configuraciones óptimas:

X_1^*	X_2^*	X_3^*
0	0	5
3	0	2
0	2	1

Problema 3

El orden lógico para responder de esta pregunta es: c – a – b y d.

- a) Puede verse que nunca se pondrán 8 tripulantes en un vuelo ya que está dominado por poner 3 tripulantes en cada vuelo (y adicionalmente le sobran 2 tripulantes, que le reportarán beneficio adicional). La primera opción tiene como máximo un beneficio de 30, mientras que la segunda tiene un beneficio mínimo de 48.

Por otro lado, puede verse también que poner 7 tripulantes tiene un beneficio máximo de 45 (haciendo las combinaciones con 1 tripulante en otro vuelo), mientras que el beneficio por poner 1 adicional en cada vuelo (es decir 3 en total) tiene beneficio mínimo de 48 y aún quedan dos tripulantes por distribuir.

b)

Caso no simplificado:

S_4	$x_4=0$	$x_4=1$	$x_4=2$	$x_4=3$	$x_4=4$	$x_4=5$	$x_4=6$	V_4^*	x_4^*
6	0	6	9	10	12	13	14	14	6
5	0	6	9	10	12	13	-	13	5
4	0	6	9	10	12	-	-	12	4
3	0	6	9	10	-	-	-	10	3
2	0	6	9	-	-	-	-	9	2
1	0	6	-	-	-	-	-	6	1
0	0	-	-	-	-	-	-	0	0

S_3	$x_3=0$	$x_3=1$	$x_3=2$	$x_3=3$	$x_3=4$	$x_3=5$	$x_3=6$	V_3^*	x_3^*
6	14	30	30	29	32	35	29	35	5
5	13	29	28	28	29	29	-	29	1-4-5
4	12	27	27	25	23	-	-	27	1-2
3	10	26	24	19	-	-	-	26	1
2	9	23	18	-	-	-	-	23	1
1	6	17	-	-	-	-	-	17	1
0	0	-	-	-	-	-	-	0	0

S_2	$x_2=0$	$x_2=1$	$x_2=2$	$x_2=3$	$x_2=4$	$x_2=5$	$x_2=6$	V_2^*	x_2^*
6	35	45	47	47	45	45	29	47	2-3
5	29	43	46	44	39	28	-	46	2
4	27	42	43	38	22	-	-	43	2
3	26	39	37	21	-	-	-	39	1
2	23	33	20	-	-	-	-	33	1
1	17	16	-	-	-	-	-	17	0
0	0	-	-	-	-	-	-	0	0

S_1	$x_1=0$	$x_1=1$	$x_1=2$	$x_1=3$	$x_1=4$	$x_1=5$	$x_1=6$	V_1^*	x_1^*
6	47	61	61	59	58	44	30	58	1-2

Si se hace usando la simplificación no es necesario considerar las decisiones $X_1=5$ y $X_1=6$.

c) Etapas: $v=1,2,3,4$ (vuelos) **(0,2 ptos.)**

Variables de decisión: X_v = Cantidad de tripulantes extra ha asignar en el vuelo v. **(0,4 ptos.)**

Variables de estado: S_v = Cantidad de tripulantes que quedan para asignar al vuelo v. **(0,4 ptos.)**

Recurrencia o función de transformación: $S_{v+1} = S_v - X_v$ **(0,2 ptos.)**

Función de recursión: $V_v(X_v, S_v) = BA(X_v) + V_{v+1}^*(S_{v+1})$ **(0,5 pto.)**

Función de beneficio: $V_v^*(S_v) = \max_{\substack{X_v \\ s.a. X_v \leq S_v}} \{V_v(X_v, S_v)\}$ **(0,2 ptos.)**

Condiciones de Borde: $V_5^* = 0$ **(0,05 pto.)**

$S_1^* = 6$ **(0,05 pto.)**

d) Existen dos políticas óptimas, estas son:

x_1^*	1
x_2^*	2
x_3^*	1
x_4^*	2

x_1^*	2
x_2^*	2
x_3^*	1
x_4^*	1

Y reportan un beneficio adicional de 61.