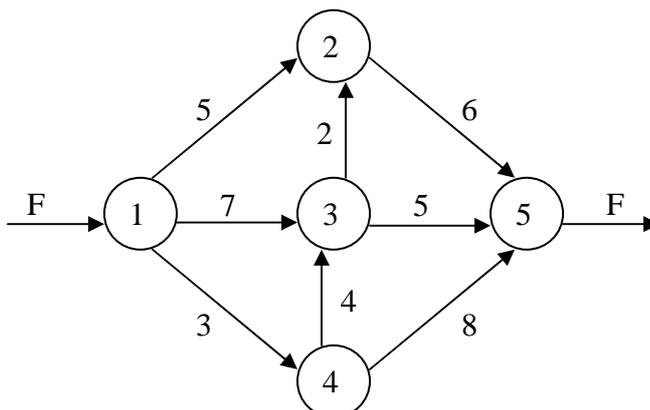




### Auxiliar extra Control 3 6 de Junio, 2008

#### Problema 1:

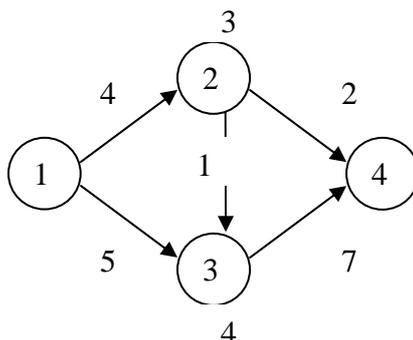
Sea el siguiente grafo:



donde los flujos mínimos de todos los arcos son 0 y los flujos máximos son los explicitados. Determine el flujo máximo  $F$  que admite la red.

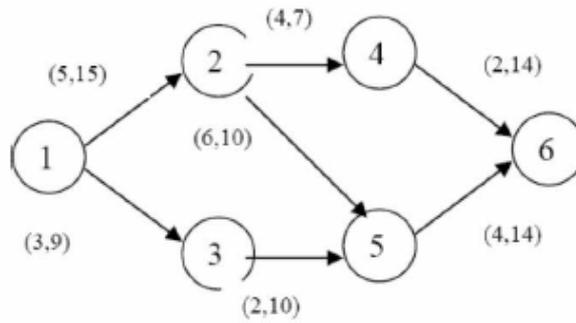
#### Problema 2:

Suponga que en una red dada, además de capacidades máximas para el flujo en cada arco, se le asigna una capacidad máxima al flujo que puede pasar por cada nodo. ¿Cómo adaptaría la red para poder resolver el problema usando el algoritmo de Ford y Fulkerson? Explique y resuelva en el siguiente ejemplo (muestre la red adaptada, resuelva usando FyF y explique finalmente que significa el resultado en la red original).



#### Problema 3:

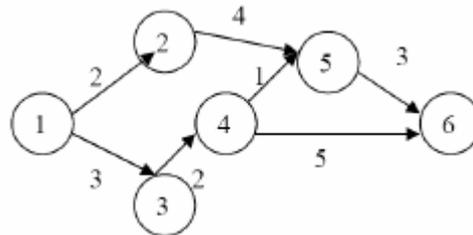
1. Suponga que tiene una red de sólo 3 nodos con un arco del nodo 1 al nodo 2, con capacidad mínima y máxima igual a  $(5,8)$ , y otro arco del nodo 2 al nodo 3, con capacidad mínima y máxima igual a  $(2,3)$ . Aplique el algoritmo de flujo inicial (fase I de Ford y Fulkerson) para demostrar que no existe un flujo factible del nodo 1 al nodo 3. Explique el resultado teórico que está usando para justificar que dicho flujo no existe.
2. Si tuviera que encontrar el flujo mínimo en la siguiente red con capacidades máximas y mínimas en cada arco y un flujo inicial factible dado, ¿qué técnicas usaría? Explique y aplíquelo al siguiente ejemplo:



Con flujo inicial factible:  $f_{12}=14$ ;  $f_{13}=4$ ;  $f_{24}=7$ ;  $f_{25}=7$ ;  $f_{35}=4$ ;  $f_{46}=7$ ;  $f_{56}=11$ .

**Problema 4:**

1. Determine la ruta más corta del nodo 1 a todos los demás nodos para la siguiente red aplicando el algoritmo de Dijkstra:

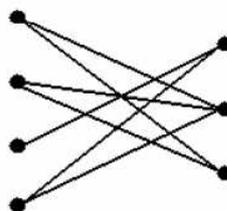


2. Si agregara un arco del nodo 3 al nodo 5 con costo 1, ¿debe aplicar todo el algoritmo nuevamente o le sirve parte de lo que hizo en el punto 1)? Resuelva nuevamente de manera eficiente.

**Problema 5:**

Un grafo es bipartito si existe una partición de sus nodos en  $V_1$  y  $V_2$  de modo que no existan aristas entre nodos de  $V_1$  ni entre nodos de  $V_2$ . Una correspondencia en un grafo es un conjunto de aristas que no comparten vértices.

- a. Explicar como transformaría un grafo bipartito cualquiera en una red de modo que el algoritmo de flujo máximo le permita encontrar la correspondencia máxima.
- b. Aplicar las ideas expresadas en el punto a) para encontrar la correspondencia máxima del siguiente grafo bipartito. (Nota: Debe transformar el grafo en una red y aplicar detalladamente el algoritmo de Ford & Fulkerson).



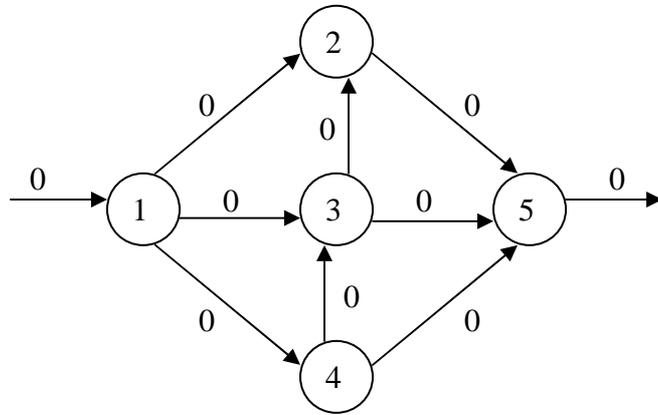
**Problema 6:**

- a. Dado el problema del vendedor viajero, escriba la familia de restricciones que garantiza que en el conjunto de soluciones factibles no pueden aparecer sub-tours.
- b. ¿Por qué el algoritmo de Dijkstra requiere costos no-negativos en los arcos? Explique su respuesta.

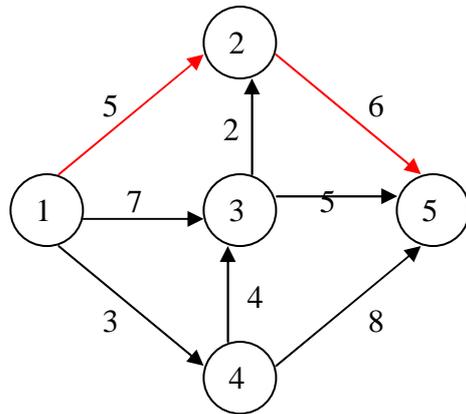
**Solución:**

**Problema 1:**

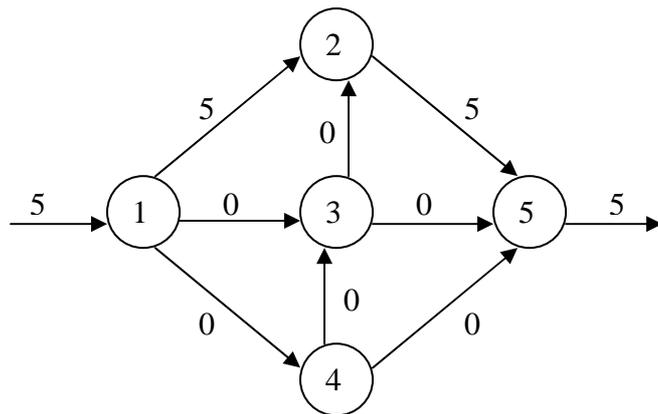
Partimos de la solución factible de flujo 0:



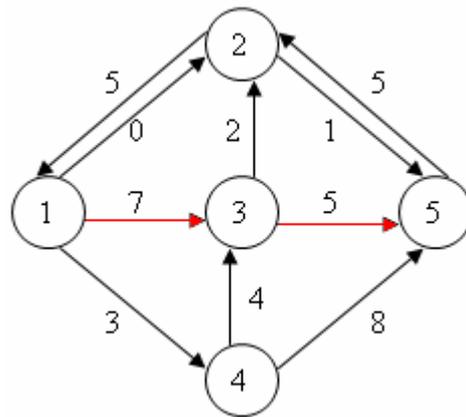
Y el grafo auxiliar es el siguiente:



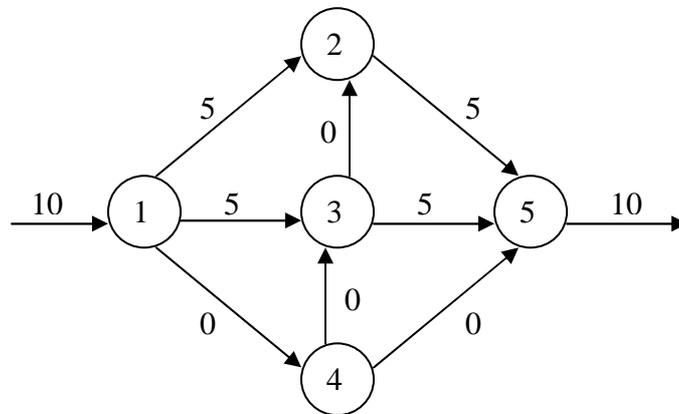
Tomando el camino 1-2-5



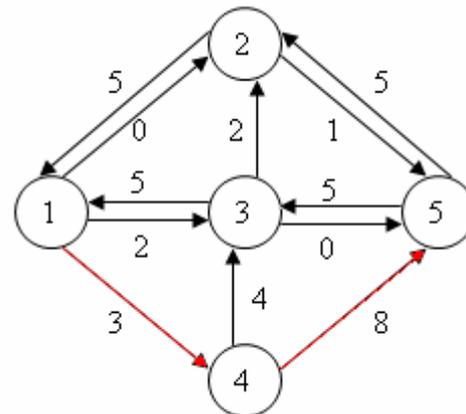
Con lo que el grafo auxiliar nos queda:



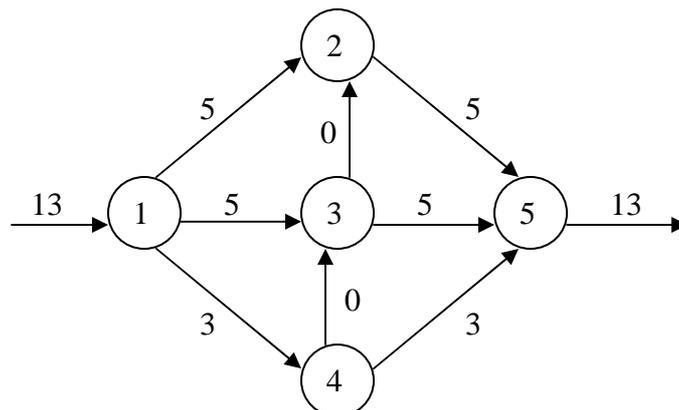
Tomemos el camino 1-3-5:



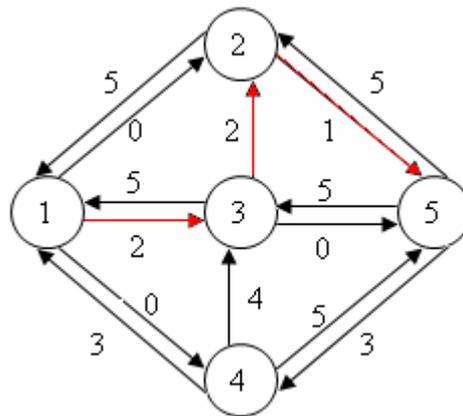
Y el grafo auxiliar:



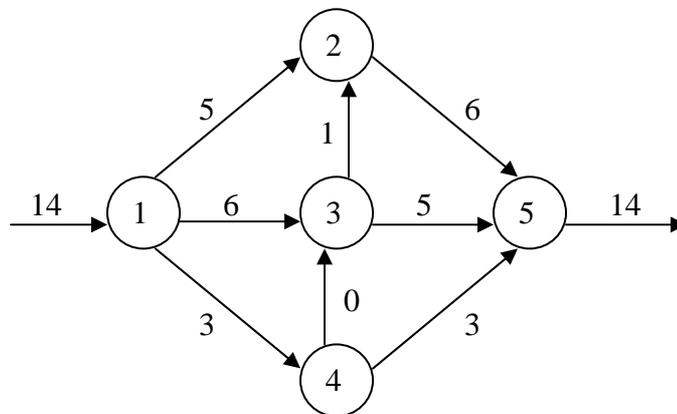
Ahora tomamos el camino 1-4-5:



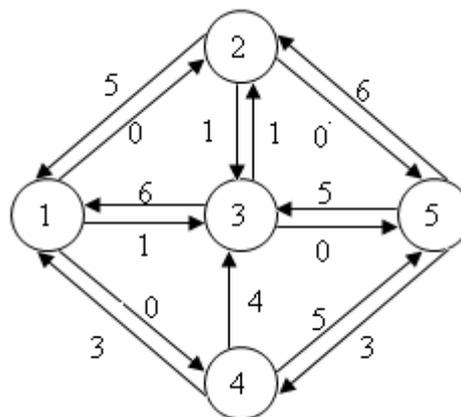
Y el grafo auxiliar:



Por último tomamos el camino 1-3-2-5:



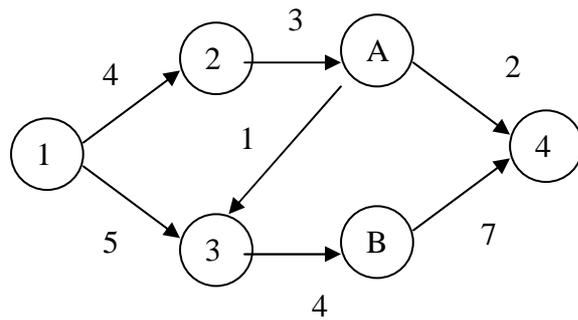
Y el auxiliar queda:



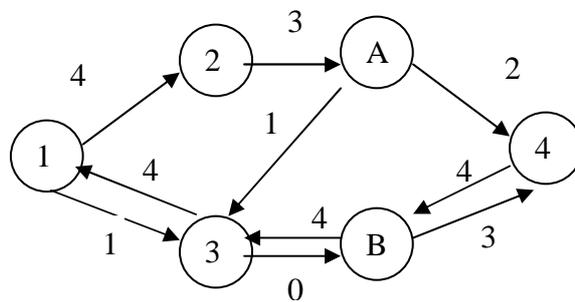
Ya que no existen más caminos, hemos llegado al óptimo y  $F = 14$ .

### Problema 2:

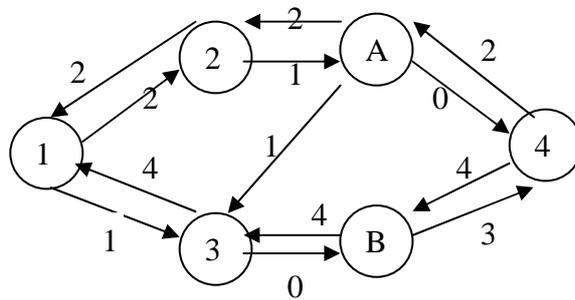
Se crean dos nodos artificiales como se muestra en la figura, y luego se resuelve como cualquier problema de F-F.



Partimos de la solución factible de flujo 0, y eligiendo el camino 1-3-b-4 con flujo máximo 4, el grafo auxiliar queda



Elegimos el camino 1-2-a-4 con flujo máximo 2, se tiene

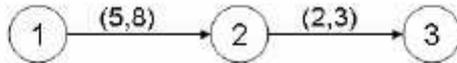


Dado que no existen nuevos caminos, hemos llegado al óptimo, lo cual en la red original corresponde a los siguientes flujos:

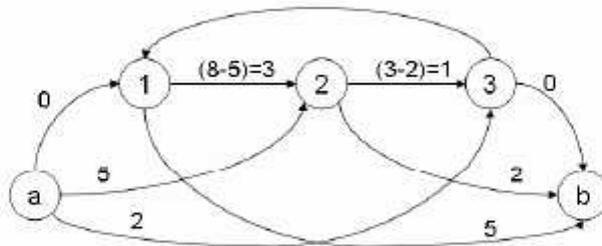
Arco	Flujo
1-2	2
1-3	4
2-3	0
2-4	2
3-4	4

**Problema 3:**

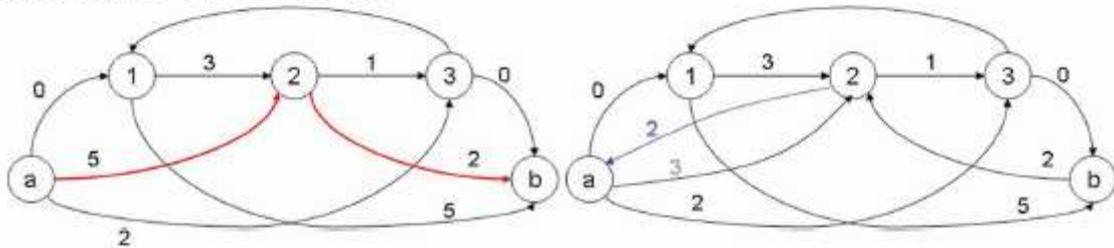
1.



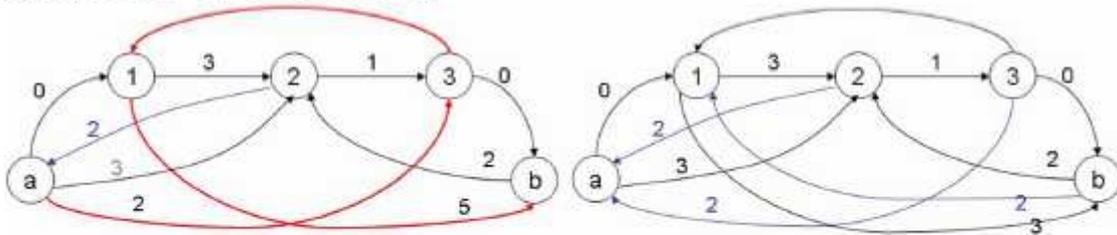
Debemos determinar el flujo máximo  $F^*$  en  $G^*$  a través de Ford y Fulkerson. El grafo auxiliar  $G^*$  es el siguiente, el cual muestra la cantidad máxima de flujo a través de cada arco (el flujo mínimo es cero). Debemos resolver el problema de flujo máximo para esta red.



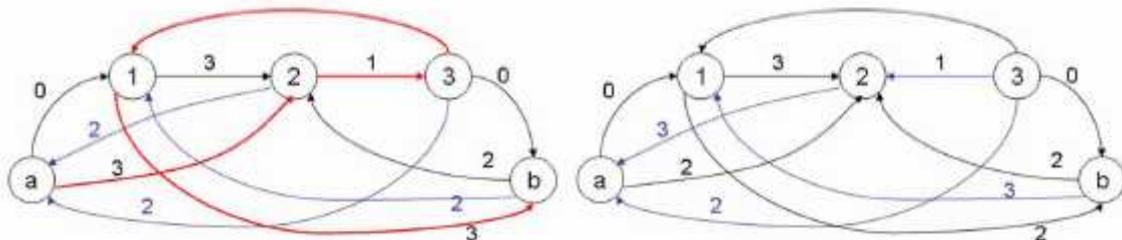
Iteración 1:  $C' = a - 2 - b$ .  $\epsilon = 2$ .



Iteración 2:  $C' = a - 3 - 1 - b$ .  $\epsilon = 2$ .



Iteración 3:  $C' = a - 2 - 3 - 1 - b$ .  $\epsilon = 1$ .



Podemos notar que ya no existe otro camino, por lo que llegamos al óptimo,  $F^* = 5$ . Sabemos que si:

$$F^* < \sum_{(i,j) \in A} l_{ij}$$

Entonces la red original  $G$  no admite flujo factible inicial.  
Como:

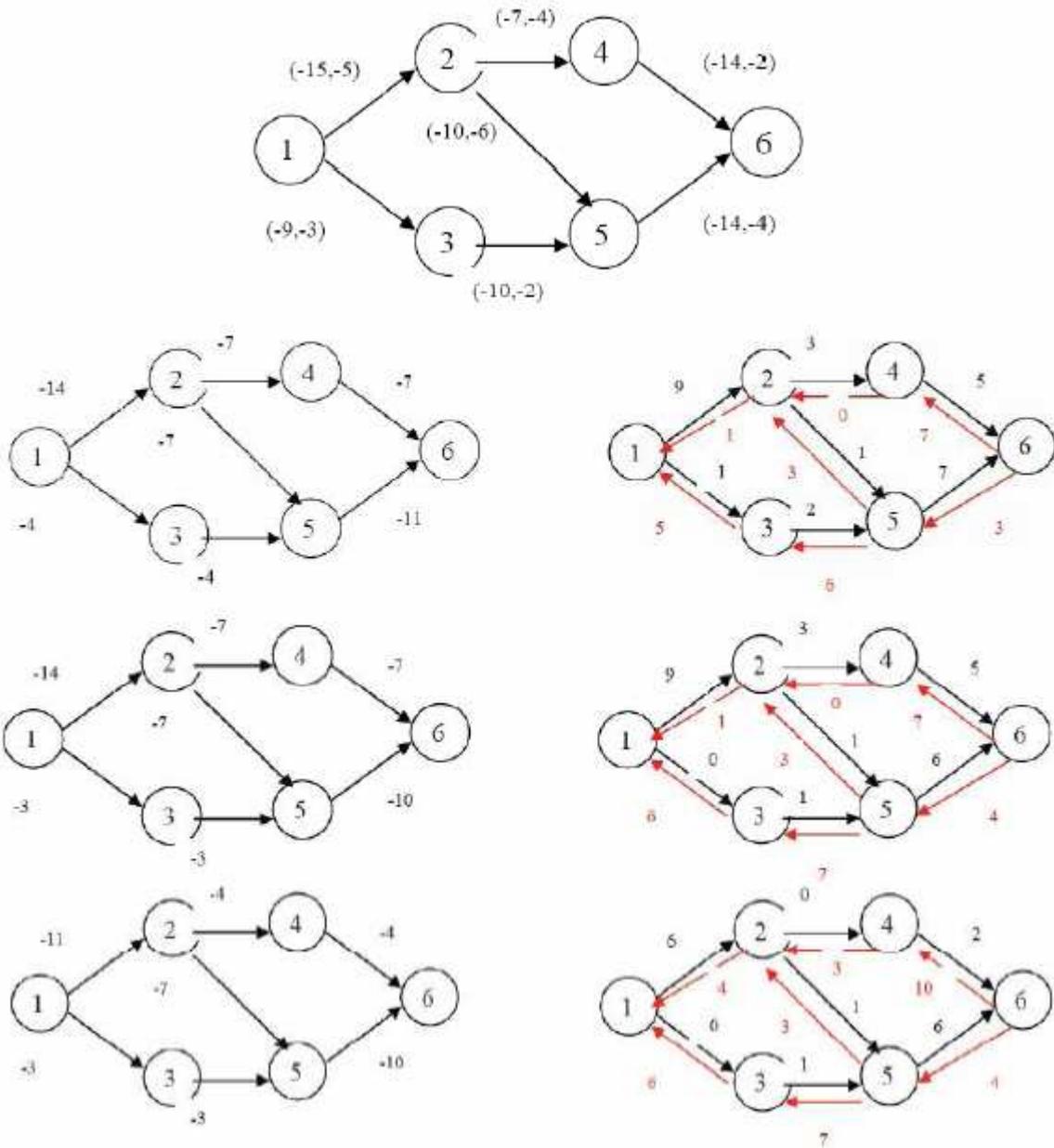
$$\sum_{(i,j) \in A} l_{ij} = l_{12} + l_{23} = 7 > F^* = 5$$

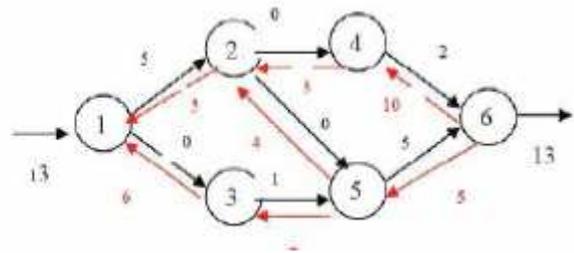
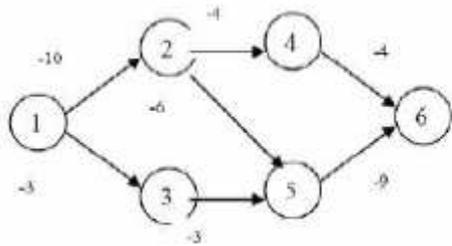
entonces no existe flujo factible desde el nodo 1 al 3.

2.-

Hay 2 formas de resolverlo. Una, multiplicar todos los valores por (-1), aplicar Ford y Fulkerson normalmente, hallar flujo máximo y después volver a multiplicar el resultado final por (-1). Otra, hacer algo análogo a F&F pero buscando caminos de disminución en vez de caminos de aumento. Cuando no hay más, el flujo es mínimo.

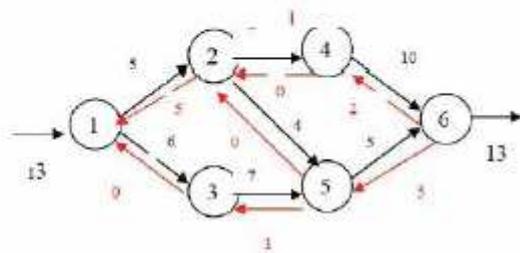
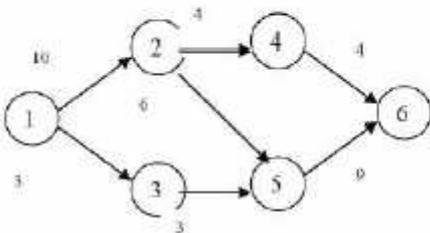
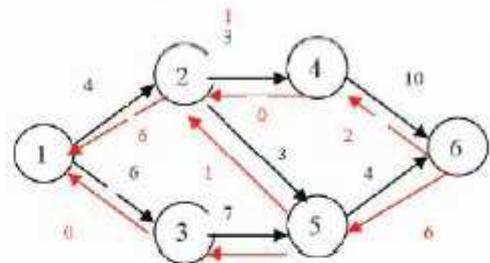
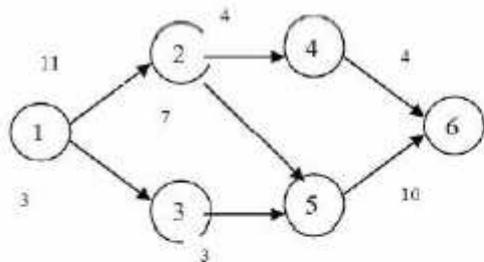
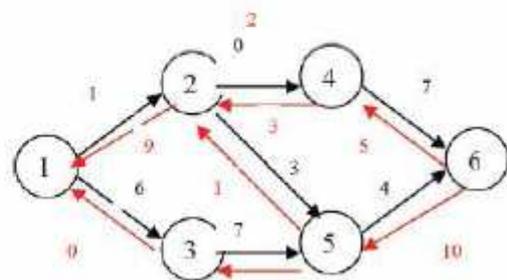
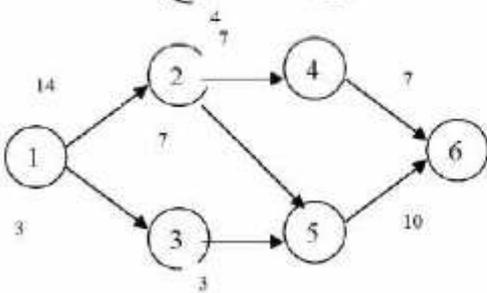
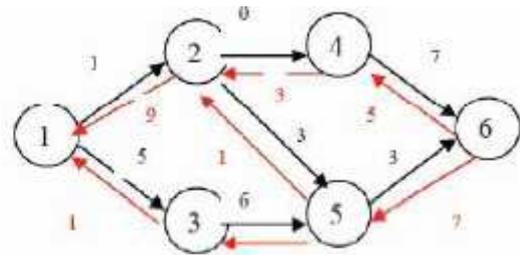
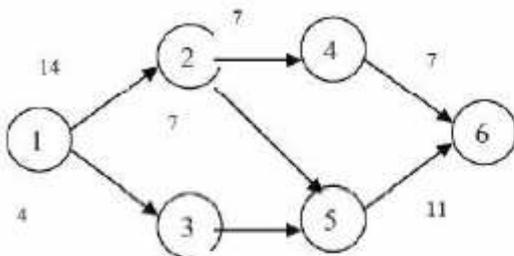
Si tomamos la primera opción:





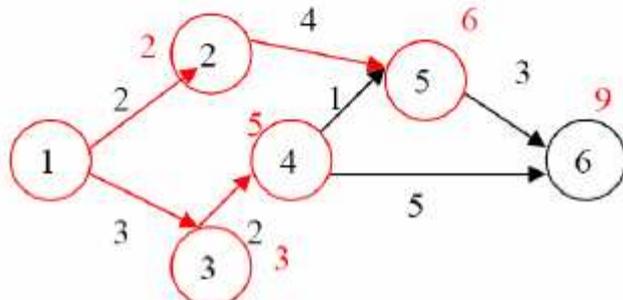
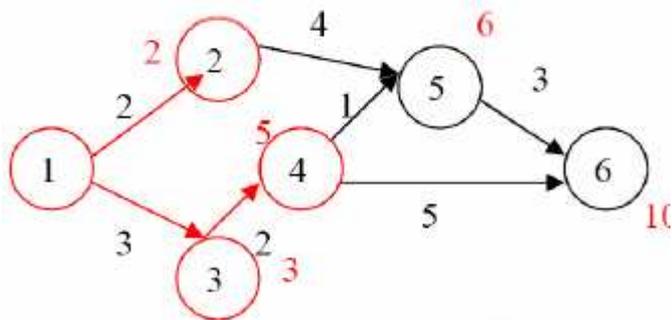
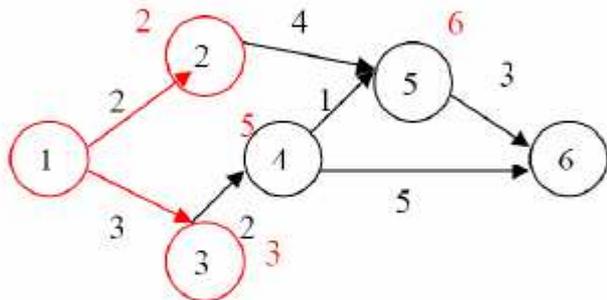
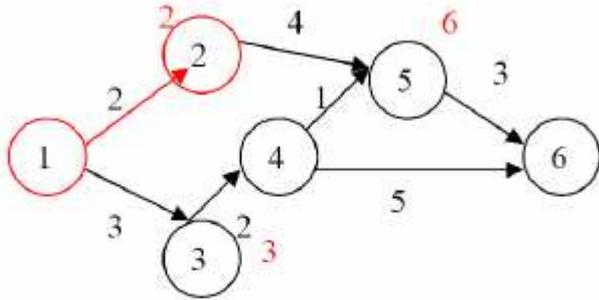
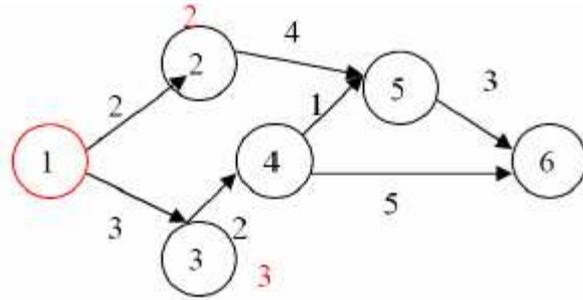
No podemos generar ningún camino de 1 a 6, por lo tanto la solución es  $-13$  (este es el flujo máximo de nuestro problema auxiliar). Ahora debemos volver a multiplicar todo por  $-1$  por lo que el flujo mínimo de nuestro problema original es  $13$ .

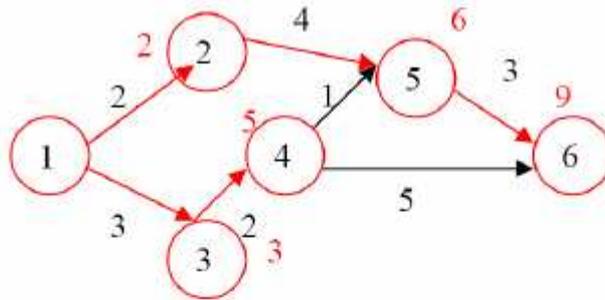
Si tomamos la segunda opción, el resultado es el mismo salvo que ahora en vez de fijarnos en el máximo aumento posible, nos fijamos en la máxima disminución posible:



Luego ya no podemos seguir disminuyendo más (análogo a no hay más caminos de 6 a 1, los rojos). Por lo tanto  $13$  es la respuesta.

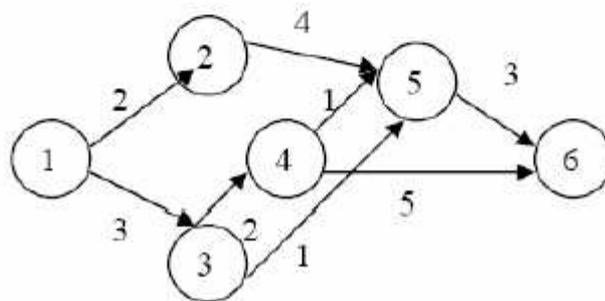
**Problema 4:**



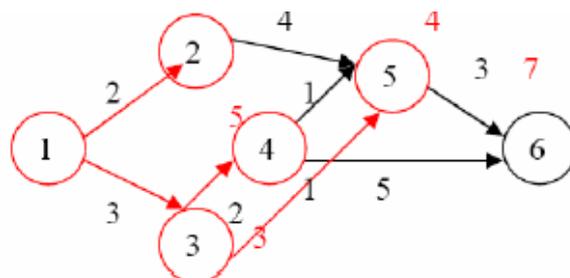
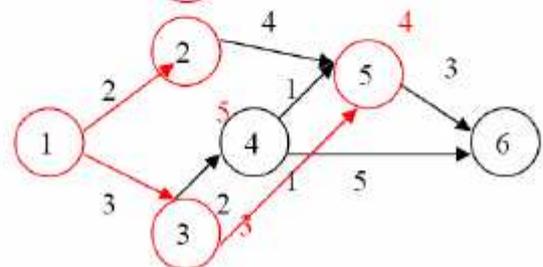
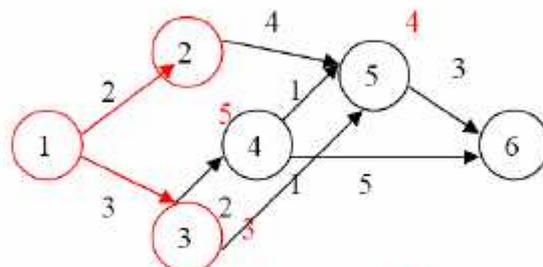


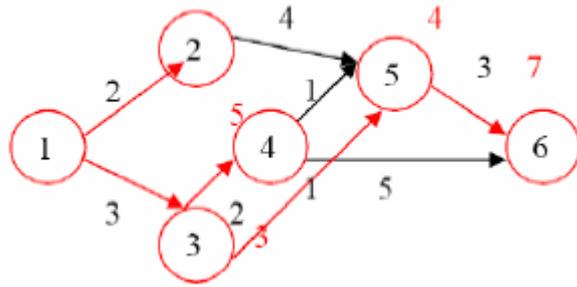
Notar que en la penúltima figura se elige 2-5 en vez de 4-5 pese a que ambos caminos tienen el mismo "costo acumulado". Esto es porque en la segunda figura se determinó  $\pi(5)=6$  con  $P(5)=2$ .

2. El caso es el siguiente:



Si como se agrega un arco que parte de 3, nos sirve todo lo anterior hasta cuando se agrega el nodo 3 al conjunto S.

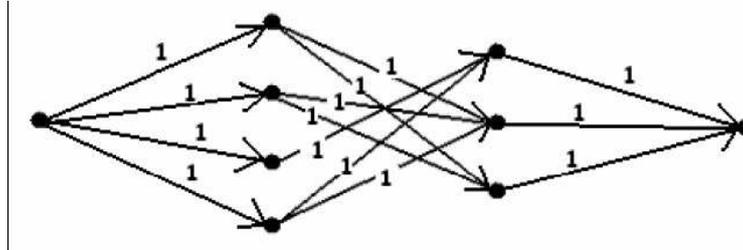




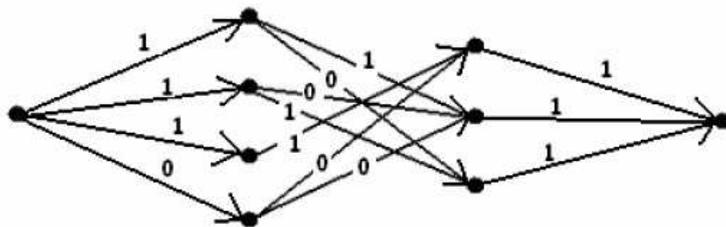
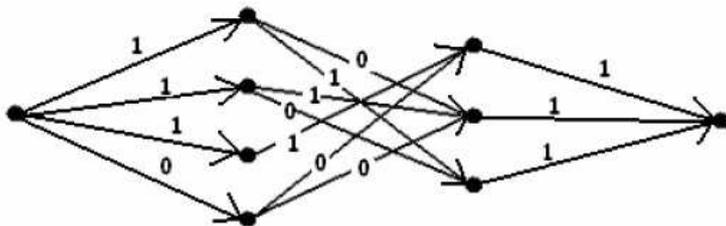
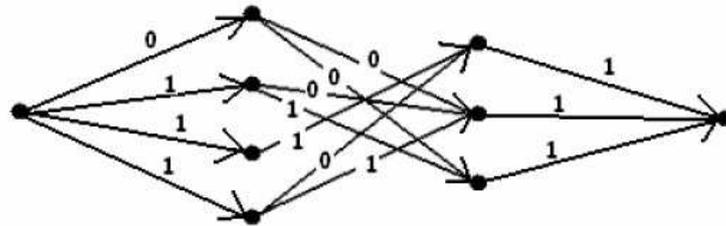
**Problema 5:**

a) Lo que se debe hacer es agregar un nodo de inicio y uno de término y agregar arcos desde el nodo inicial a todos los nodos pertenecientes a  $V_1$ , y de todos los nodos pertenecientes a  $V_2$  hacia el nodo final. Luego se debe orientar todos los arcos del gráfico, en la dirección que va desde el nodo inicial con el final. Se le asigna capacidad máxima igual a todos los arcos, y luego se resuelve mediante el algoritmo de flujo máximo.

b)



Luego de aplicar el algoritmo, tres posibles soluciones son:



Se ve que la correspondencia máxima es 3.

**Problema 6:**

- a. Existen dos formulaciones posibles, cualquiera de las dos es válida:

$$\sum_{(i,j) \in S, j \in V \setminus S} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S \subseteq V \quad \text{tal que } 2 \leq |S| \leq n-2$$
$$\sum_{(i,j) \in S, j \in S, i \neq j} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall S \quad \text{tal que } 2 \leq |S| \leq n-2$$

Donde S son subconjuntos de ciudades a visitar. Además se deben explicar ambas restricciones, para lo cual lo más fácil es mostrar un ejemplo con un conjunto pequeño de ciudades para ver como funcionan las restricciones. Por ejemplo para la segunda restricción, si se tienen 3 ciudades, pueden existir a lo más 2 arcos activos ( $x_{ij} > 0$ ) entre los 3 posibles.

- b. Porque el algoritmo podría no encontrar la ruta más corta. Por ejemplo, en una red de 3 nodos, donde hay un camino de 1 al 3 de longitud 2, de 1 al 2 de longitud 3 y otro de 2 al 3 de longitud -2, Dijkstra no encuentra la ruta mas corta de 1 a 3. Encuentra el camino de longitud 2 y no el de longitud 1.

**Dudas y/o comentarios a:**  
**André Carboni**  
[acarboni@ing.uchile.cl](mailto:acarboni@ing.uchile.cl)