Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A – Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Auxiliares: André Carboni
Leonardo López
Rodrigo Wolf

Auxiliar 6
28 de Mayo, 2008

Problema1:

Un estudiante de ingeniería de una prestigiosa universidad ha descubierto su nueva pasión: Los juegos de rol en línea. Hace unas semanas ha comenzado a jugar WoB (World of Beauchef), donde ha creado un poderoso caballero al que ha llamado Chrono.
Nuestro amigo estudiante debe compatibilizar sus estudios con el juego, las cuales supondremos que son las únicas 2 actividades que realiza.
El estudiante sabe que cada hora gastada en el juego le genera 2 unidades de cansancio, mientras que una hora de estudio le genera 5 unidades. El médico le recomendó no cansarse más de 43 unidades en un día.
Nuestro amigo debe dormir al menos 8 horas, por lo que cuenta con un máximo de 16 horas para realizar ambas actividades durante el día.
Cada hora gastada jugando le genera 3 unidades de felicidad, mientras que cada hora invertida en estudiar le reporta 5 unidades, pues sabe que estudiar es muy importante para su futuro como ingeniero. Considere también que una fracción de hora gastada en estas actividades no le genera felicidad alguna.

1) Plantee el modelo de programación lineal entera que debe resolver el estudiante para maximizar su felicidad.
2) Entregue la solución del problema usando el algoritmo de Branch & Bound (Ramificación y acotamiento).

Problema 2:

La empresa Máxima S.A., luego del fracaso de Pulschuper para encontrar a la famosa maleante Carmen SanDego, decidió despedirla, motivo por el cual Pulschuper debe abandonar la oficina y no volver nunca más. El problema es que solo llevó una mochila pequeña con capacidad de 2lt. y en su estante tiene su notebook, una foto de su hija, su polerón favorito y un lápiz. Si los utensilios utilizan una capacidad de 1.2, 0.6, 0.8 y 0.3 respectivamente y tienen utilidades de 8, 10, 5 y 1 respectivamente, utilice el algoritmo Branch & Bound para ayudar a Pulschuper a decidir que utensilios llevarse a su casa.

Problema 3:

a) ¿En qué casos se puede detener la ramificación en un nodo durante la aplicación del algoritmo Branco & Bound (B&B)? Mencione 3 casos con justificación.
b) Suponga que al resolver un problema de programación entera, en la primera ramificación del algoritmo de B&B en una de las ramas le da un óptimo con coordenadas enteras. ¿Puede afirmar que es el óptimo del problema general? ¿Por qué?

Solución:

Problema 1:

1) Variables de decisión:

X = Cantidad de horas invertidas en el juego
Y = Cantidad de horas invertidas estudiando

Restricciones:

1. Cansancio:

$$2*X + 5*Y \le 43$$

2. Máximo horas diarias:

$$X + Y \le 16$$

3. Naturaleza de las variables

X, Y enteras

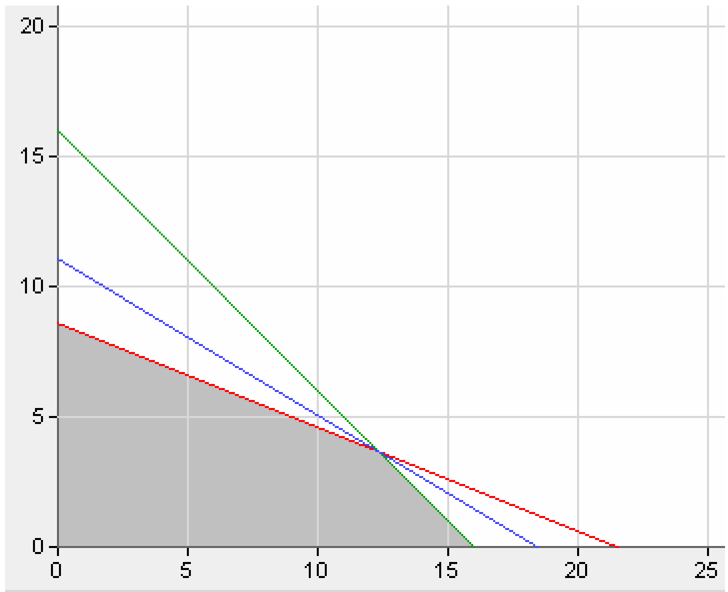
Función objetivo:

$$\text{Max } z = 3*X + 5*Y$$

2) Debemos resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 3x + 5y \\ \text{s.a.} \quad 2x + 5y &\le 43 \\ x + y &\le 16 \\ x, y &\text{ enteros} \end{aligned}$$

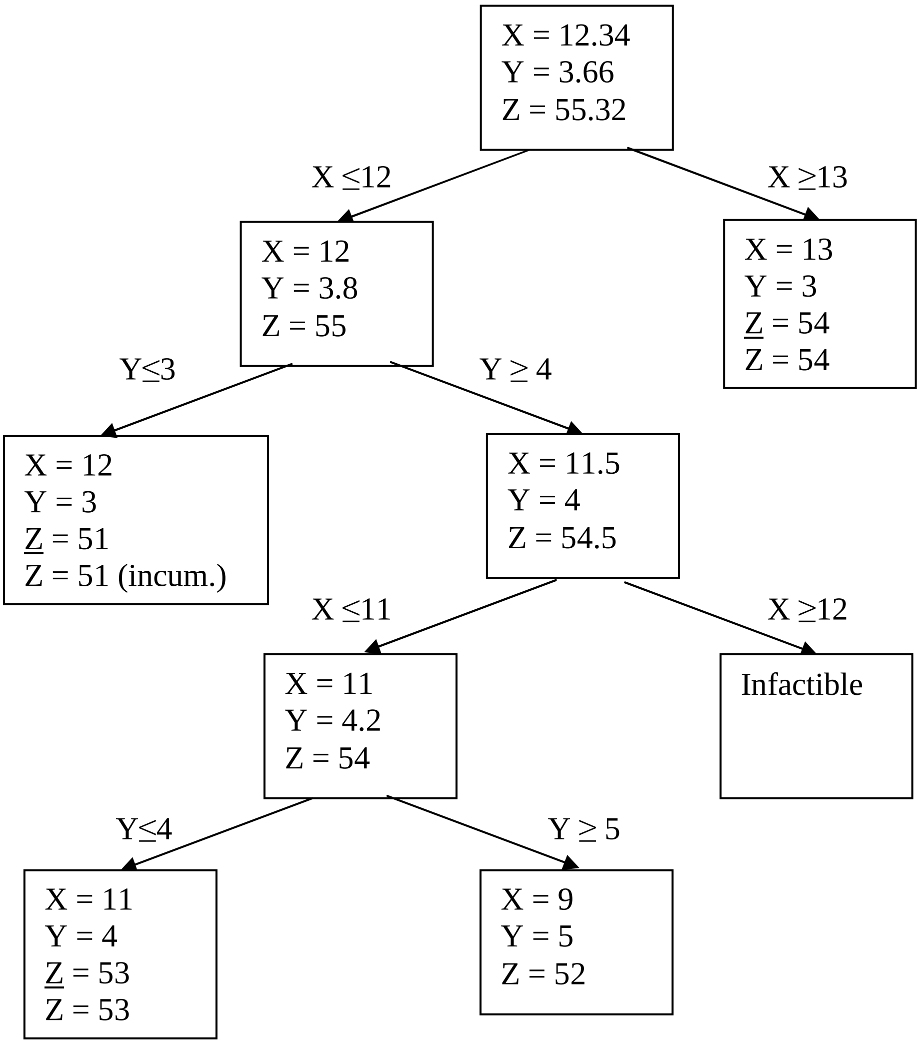
Gráficamente:



Primero se resuelve el problema relajado, que es la intersección de las dos restricciones, así se obtiene: X = 12.34 e Y = 3,66

Luego se proceda a la ramificación, comenzando con el incumbente *z*= -∞.
La resolución se muestra en el árbol siguiente, es importante aclarar que cada nodo contiene además de la restricción que se especifica en el mismo, las restricciones de toda la rama superior a él.

La solución entera es X = 13, Y = 3 y Z = 54.



Problema 2:

Variables:

$$X_1 = \begin{cases} 1 & si\ llevanotebook \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1 & si\ lleva\, foto \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$X_3 = \begin{cases} 1 & si\ lleva\, poleron \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$X_4 = \begin{cases} 1 & si\ llevalapiz \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Restricciones:

1) Capacidad de la mochila:

$$1{,}2x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}8x_3 + 0{,}3x_4 \leq 2$$

2) Naturaleza de las variables:

$$x_j \in \{0{,}1\} \quad j \in \{1{,}2{,}3{,}4\}$$

Función objetivo:

$$\text{máx } z = 8x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 1x_4$$

Para encontrar la solución del problema relajado, se obtienen las mejores razones de beneficio y volumen:

a) Para el notebook 8/1,2 = 6,67
b) Para la foto 10/0,6 = 16,67
c) Para el polerón 5/0,8 = 6,25
d) Para el lápiz 1/0,3 = 3,33

La solución del problema relajado consiste en llevar los artículos que tengan mejor razón hasta completar la capacidad, por lo tanto la solución óptima del problema relajado queda:

$$x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 0{,}25; x_4 = 0$$

Luego la primera etapa queda:

$$x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 0{,}25; x_4 = 0; Z_0 = 19{,}25$$

Ramificación:

P1) $x_3 = 1$ $\quad x_1 = 0{,}5; x_2 = 1; x_3 = 1; x_4 = 0; Z_1 = 19$

P2) $x_3 = 0$ $\quad x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 0; x_4 = 1/3; Z_2 = 18{,}33$

P3) $x_3 = 1 \ \ x_1 = 1$ $\quad x_1 = 1; x_2 = 0; x_3 = 1; x_4 = 0; Z_3 = 13$

(no se sigue iterando) $\Rightarrow$ *incumbente*: $Z_3 = 13$

P4) $x_3 = 1 \ \ x_1 = 0$ $\quad x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 1; x_4 = 1; Z_4 = 16$

(no se sigue iterando) $\Rightarrow$ *incumbente*: $Z_4 = 16$

P5) $x_3 = 0 \ \ x_4 = 1$ $\quad x_1 = 11/12; x_2 = 1; x_3 = 0; x_4 = 1; Z_5 = 18{,}33$

P6) $x_3 = 0 \ \ x_4 = 0$ $\quad x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 0; x_4 = 0; Z_6 = 18$

(no se sigue iterando) $\Rightarrow$ *incumbente*: $Z_6 = 18$

P6) $x_3 = 0 \ \ x_4 = 1 \ \ x_1 = 1$ $\quad x_1 = 1; x_2 = 5/6; x_3 = 0; x_4 = 1; Z_5 = 17{,}33$

P7) $x_3 = 0 \ \ x_4 = 1 \ \ x_1 = 0$ $\quad x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 0; x_4 = 1; Z_6 = 11$

Peor que el incumbente (no se sigue iterando)

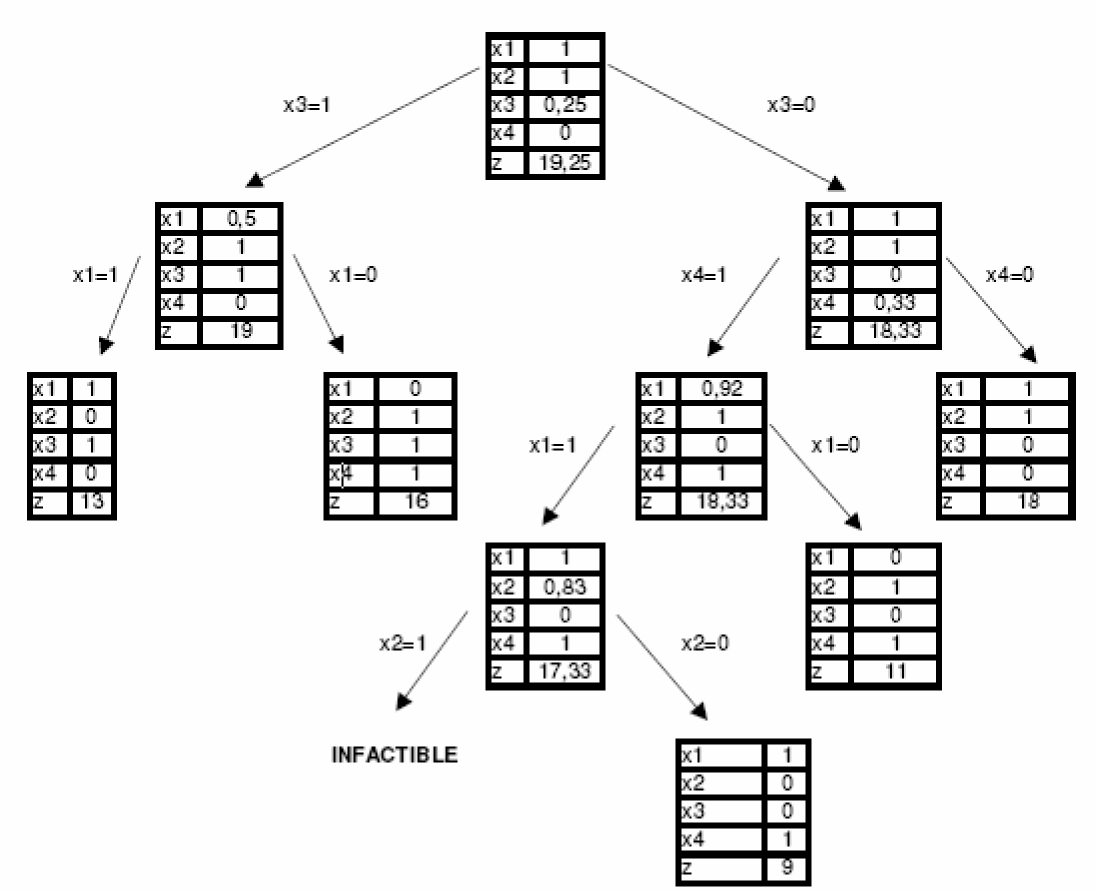
P8) $x_3 = 0 \ \ x_4 = 1 \ \ x_1 = 1 \ \ x_2 = 1$ $\quad$ Infactible

P8) $x_3 = 0 \ \ x_4 = 1 \ \ x_1 = 1 \ \ x_2 = 0$ $\quad x_1 = 1; x_2 = 0; x_3 = 0; x_4 = 1; Z_5 = 9$

Peor que el incumbente (no se sigue iterando)

Luego la solución óptima es $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=0$, $x_4=0$ y $z=18$

y el arbol queda:



Problema 3:

a)

- El nodo generó un problema infactible.
- La solución del problema en ese nodo es entera.
- La solución del problema en ese nodo es fraccionaria pero es "peor" que alguna entera que ya ha sido obtenida (el valor de la incumbente).

b) No se puede afirmar que sea el óptimo del problema general pues se pueden presentar varias situaciones:

- Si en la otra rama también da una solución entera, el óptimo del problema general es el de la rama con mejor valor en la función objetivo.
- Si en la otra rama la solución no es entera y el valor de la función objetivo es peor que el de la rama con solución entera, entonces la rama con solución entera es el óptimo pues ramificar la otra rama sólo empeorará el valor de la función objetivo.
- Si en la otra rama la solución no es entera pero el valor de la función objetivo es mejor que el de la rama con solución entera, entonces se debe ramificar la rama y no se puede afirmar que sea el óptimo del problema general.

Dudas y/o comentarios a:
André Carboni
acarboni@ing.uchile.cl