



Profesores: Guillermo Durán, Daniel Espinoza G.

Semestre: Otoño 2008

Fecha: 14 de mayo de 2008

IN34A Optimización

Control N°2

Problema 1 (33.3 %)

1. (1,0 pto.) Explique cómo el algoritmo SIMPLEX asegura no salirse del espacio de soluciones factibles al efectuar una iteración.
2. (1,0 pto.) Señale si el algoritmo SIMPLEX asegura en cada iteración la máxima variación posible de la función objetivo. ¿Por qué?. Si no lo asegura, explique cómo se podría lograr la máxima variación.
3. (1,0 pto.) ¿Qué significa que el algoritmo SIMPLEX es un algoritmo exponencial? Mencione un algoritmo polinomial para problemas de programación lineal y la idea básica de su funcionamiento.
4. (1,0 pto.) Al resolver un problema de optimización donde se construyen sillas y mesas, y se tienen 3 recursos para construirlas, madera, fierro y horas/hombre/semanales, las variables duales asociadas a estas tres restricciones son: Y_m , Y_f , Y_{hh} respectivamente. Le ofrecen los siguientes negocios:
 - a) Si en el óptimo la variable de holgura de la restricción asociada a la madera vale cero, qué valores puede tomar la variable de dual asociada a esa restricción. Estaría dispuesto a comprar 1 unidad de madera a un precio $Y_m + 1$?
 - b) No se tiene el valor de la variable dual Y_f , pero usted sabe que la restricción del problema primal asociada al fierro es no activa. Sin hacer nuevos cálculos, cuánto estaría dispuesto a pagar por una unidad de fierro adicional?. Justifique.

- c) Un trabajador quiere trabajar para usted y le ofrece trabajar 45 horas a la semana a un precio de $Y_{hh} - 1$, cada hora. Aceptaría el negocio?. Justifique.
5. (1,0 pto.) Comente la siguiente afirmación: "Si un problema lineal tiene solución (finita) entonces el valor óptimo se alcanza exclusivamente en un punto extremo del poliedro factible".
6. (1,0 pto.) Demuestre que si el problema primal es no acotado entonces su correspondiente dual es infactible (explícite qué formulaciones está usando para primal y dual). Puede usar para hacer la demostración teoremas vistos en clase.

Problema 2 (33.3 %)

La empresa deportiva BAM-BAM-MATADOR SA se dedica a la confección de pelotas de fútbol. Prepara 2 tipos de productos: pelotas de fútbol profesional y pelotas de fútbol-5. Las pelotas de fútbol profesional demandan 1 unidad de cuero y 2 unidades de plástico sintético. Las pelotas de fútbol-5 demandan 1 unidad de cuero y 1 unidad de plástico sintético. Cada pelota de fútbol profesional se vende a 7 unidades monetarias (UM) y cada pelota de fútbol-5 se vende a 5 UM. Para la próxima semana la empresa dispone de 6 unidades de cuero y 8 unidades de plástico sintético. Se asume que todo lo que se produce será vendido. Con estos datos, la empresa quiere planificar su producción.

1. (0,4 ptos.) Formule un problema lineal continuo que maximice la ganancia de la próxima semana de BAM-BAM-MATADOR SA.
2. (0,3 ptos.) Encuentre el óptimo de manera gráfica.
3. (1,0 pto.) Verifique que el óptimo encontrado en 2. es correcto usando SIMPLEX.
4. (1,0 pto.) Usando SIMPLEX calcule en qué rango se puede mover la disponibilidad de unidades de cuero de modo que la base óptima siga siendo la misma.
5. (1,0 pto.) Usando los costos reducidos del SIMPLEX calcule en qué rango se puede mover el precio de las pelotas de fútbol-5 de modo que el óptimo siga siendo el mismo.
6. (0,3 ptos.) Formule el dual del problema original.

7. (1,0 pto.) Calcule el óptimo del dual usando el Teorema de Holgura Complementaria.
8. (1,0 pto.) Si se le ofrecen a BAM-BAM-MATADOR 3 nuevas unidades de cuero a 2,5 UM la unidad, debería comprarlas o no? Justifique.

Recuerde que:
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Problema 3 (33.3 %)

1. (3 ptos.) Consideremos $M = \{1, \dots, m\}$, $N = \{1, \dots, n\}$, y sean $M_j \subseteq M$ para $j \in N$. Decimos que $F \subseteq N$ cubre (*covers*) M si $M = \bigcup_{i \in F} M_i$. Decimos que $F \subseteq N$ es un empaquetamiento (*packing*) con respecto a M si $M_i \cap M_j = \emptyset \forall i \neq j \in F$. Finalmente decimos que $F \subseteq N$ es una partición (*partition*) de M si es un covering y un packing al mismo tiempo. Supongamos que escoger el conjunto M_j tiene un costo/beneficio de c_j .

Formule el problema de obtener un cover, un packing y un partition F de costo/beneficio mínimo como un problema lineal entero, suponiendo:

$$\begin{array}{ll} M = \{1, 2, 3, 4, 5\} & N = \{1, 2, 3, 4\} \\ M_1 = \{1, 2, 3\} & c_1 = 1 \\ M_2 = \{3, 4\} & c_2 = -6 \\ M_3 = \{3, 4, 5\} & c_3 = -5 \\ M_4 = \{1, 2\} & c_4 = 2 \end{array}$$

y encuentre el óptimo en cada caso.

Hint: Para la formulación arme una matriz A que utilice de manera apropiada en las columnas la composición de los conjuntos M_j y elija el vector b conveniente.

2. (3 ptos.) Considere $P^i := \{x \in \mathbb{R}_+^n : A^i x \leq b^i, x \leq d\}$ para $i = 1, \dots, m$. Definimos $Y^k := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{existen al menos } k \text{ conjuntos } P^i \text{ tales que } x \in P^i\}$. Formule el espacio de soluciones factibles de Y^k como un problema entero mixto.

Nota: Para cada P^i existe w^i tal que $\forall 0 \leq x \leq d$ se tiene que $A^i x \leq b^i + w^i$.

Hint: Utilice una variable binaria que valga 0 si x no está en P^i .