Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A – Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Auxiliares: André Carboni
Leonardo López
Rodrigo Wolf

Auxiliar Extra Control 2

Problema 1

1. ¿Es el algoritmo SIMPLEX un algoritmo polinomial? ¿Es el problema de programación lineal un problema polinomial? Justifique sus respuestas.
2. Argumente sobre la veracidad o no de la siguiente frase: "El algoritmo Simplex siempre termina con sus iteraciones cuando la solución factible básica encontrada es un óptimo".
3. Suponga un problema de programación lineal en forma estándar, con n variables y m restricciones (n ≥ m). Dar una cota superior en función de m y n (y explicarla) para el número de vértices que puede tener el poliedro factible del problema.
4. Explique el significado económico del valor óptimo de las variables duales. ¿Qué hipótesis hay que pedirle al problema primal para que este análisis tenga sentido?
5. Muestre un ejemplo de un problema lineal infactible cuyo dual también sea infactible.
6. Considere un problema de programación en su forma estándar, con base óptima B^* y punto óptimo x^*.
   a. Suponga que se modifica un coeficiente c_k de la función objetivo. ¿Qué costos reducidos deben ser analizados para saber si B^* sigue siendo base óptima? ¿Qué estrategia utilizaría para encontrar el nuevo óptimo si al modificar c_k la base óptima cambia?
   b. Suponga que se modifica un valor b_i del vector de lado derecho. ¿Cómo verifica si la base óptima continúa siendo la misma? ¿Si la base óptima continua siendo la misma implica que x^* no cambia? ¿Qué haría para resolver el nuevo problema si concluye que la base óptima cambia? Justifique.

Problema 2

Considere el siguiente problema (P):

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad x_2 \\ &s.a. \\ &-x_1 + x_2 \leq 2 \\ &2x_1 + x_2 \leq 4 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Calcular el óptimo en forma gráfica.
2. Escribir el problema dual y encontrar su óptimo (sin usar simplex ni análisis gráfico).
3. Usar simplex para chequear el óptimo primal.
4. ¿En qué rango puede moverse el c_1 = 0 (coeficiente de x_1 en la función objetivo del problema primal) para que el óptimo siga siendo el mismo? (Usar simplex y no interpretación gráfica).
5. ¿En qué rango puede moverse el b_1 = 2 (coeficiente del vector b en la primera restricción del problema primal) para que la base óptima siga siendo la misma? (Usar simplex y no interpretación gráfica.
6. Suponga que la segunda restricción cambia a $2x_1 + x_2 \geq 4$. Observando su gráfico explicar qué pasa con el problema primal. A partir de esto último, deducir qué pasa con el problema dual (Sin cálculos ni gráficos adicionales). Justificar diciendo qué resultado teórico está utilizando.

Problema 3

Suponga que es el gerente de producción de una compañía que fabrica caramelos. Esta empresa fabrica tres tipos de productos diferentes, las que sólo se diferencian en las cantidades de *chocolate* y *azúcar* necesarias para su fabricación, información que se proporciona en la siguiente tabla.

	Cantidad de Azúcar (kilos)	Cantidad de Chocolate (kilos)	Ganancias [$]
Producto 1	1	2	3
Producto 2	1	3	7
Producto 3	1	1	5

La disponibilidad de chocolate para la producción es de 100 kilos, mientras que la disponibilidad de azúcar es de 50 kilos.

1. (0,5 ptos) Formule un modelo de programación lineal que permita encontrar los niveles de producción que maximicen las ganancias de la compañía.
2. (1,5 ptos) ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por aumentar marginalmente las disponibilidades de azúcar y chocolate?. Interprete económicamente el dual de este problema de optimización.
   Hint: Puede ser de utilidad plantear y resolver el problema dual.
3. (1,0 ptos) Utilizando la información de la pregunta anterior determine los niveles de producción óptimos.
4. (1,0 ptos) ¿Para qué valores de la ganancia asociada al producto 1, la base óptima no cambia?.
5. (1,0 ptos) Si se dispusiera de 60 kilos de azúcar, ¿Cuál sería la producción óptima?. ¿Cuánto serían las ganancias que la empresa obtendría en esta situación?.
6. (1,0 ptos) Considere que ahora puede fabricar un cuarto producto, que reporta una utilidad de 17 [$] y requiere de 3 kilos de azúcar y 4 kilos de chocolate para su fabricación. Compare cualitativamente las ganancias que tendría respecto a la situación inicial. ¿Tendría que fabricar esta empresa producto tipo 4 en su plan de producción óptimo?.
   OJO: no se está pidiendo que de los valores de una posible nueva solución.

Problema 4

La peligrosa maleante Carmen SanDego, está suelta en la ciudad ScolandYierd. La agencia Máxima S.A. ha mandado a su famosa detective Pulschuper para que la capture.
Se sabe que Carmen está escondida en la estación E de las P estaciones de la ciudad. Pero para tener suficientes motivos para capturarla Pulschuper debe encontrar exactamente D pistas. Hay una pista por estación y no hay pistas ni en la estación E ni en la estación 1, donde se encuentra la agencia Máxima S.A..
En cada estación i Pulschuper tiene la opción de buscar o no la pista, si la decide buscar demora h_i en encontrarla.
Pulschuper se demora un tiempo b_{ij} entre la estación i y la estación j si se va en bus, aunque puede optar tomar un taxi con el que se demora t_{ij} ($t_{ij} < b_{ij}$) o un metro el que demora m_{ij} ($m_{ij} < t_{ij}$). Sin embargo sólo cuenta con un determinado número de pasajes en taxi T y en metro M (M+T << P). Además, sólo se pueden tomar metros entre estaciones congruentes (una estación se dice **NO-**congruente con otra si ambas son impares). Asuma que P es par.
Considere que las estaciones están numeradas pero no es necesario recorrerlas en orden, ni visitar todas las estaciones.
Considere que no se puede volver a una estación que ya fue visitada. Y que no se puede ingresar a E con menos de D pistas.
Sabiendo que Pulschuper tiene que volver directamente a la agencia cuando encuentre la maleante (es decir debe viajar desde E a 1), plantee un PPLE (Problema de Programación Lineal Entera) que le permita a Pulschuper encontrar a Carmen SanDego en el menor tiempo posible.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A – Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Auxiliares: André Carboni
Leonardo López
Rodrigo Wolf

Pauta Auxiliar Extra Control 2

Problema 1

1. No, simplex es un algoritmo exponencial, ya que si bien el algoritmo en general se comporta de manera eficiente si existen casos en que simplex toma un tiempo exponencial para resolver el problema. Por otra parte, el problema de programación lineal si es polinomial ya que existen algoritmos que lo resuelven en tiempo polinomial en el tamaño del problema, por ejemplo el método de las elipsoides o el de Nesterov y Nemirovskii (basta que digan que existen).

2. Falso. Cuando un punto verifica la condición de optimalidad siempre se cumple que este punto es óptimo, pero un óptimo no siempre se verifica la condición de optimalidad. Entonces simplex puede estar ubicado en un óptimo y sin embargo, como no se verifica la condición de optimalidad, seguir iterando. Un caso en que esto puede suceder es cuando el óptimo es una solución degenerada.

3. Una cota superior es $\binom{n}{m}$ ya que este número nos entrega el total de vértices posibles, vale decir, todos los conjuntos con m variables (que es el número de variables que debe haber en la base) que podemos hacer dado que tenemos n variables. Decimos que es la cota superior, ya que no necesariamente todas las combinaciones que se puedan armar van a ser factibles, o sea no todos los vértices van a estar en la región o zona factible.

4. Supongamos que cada restricción i representa la disponibilidad de algún recurso i, del que se dispone de b_i unidades ($\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$). La variable dual i en el óptimo y_i^* (la asociada a la restricción i), representa el aumento del valor de la función objetivo de problema primal ante el aumento en una unidad de la disponibilidad del recurso i (del parámetro b_i). O sea, representa el valor marginal del recurso i y si tuviéramos que pagar cierta cantidad de dinero por una unidad extra del recurso i, pagaríamos hasta y_i^* pesos (suponiendo que la función objetivo está medida en pesos).
   Este análisis tiene sentido sólo si el problema primal tiene al menos una solución óptima básica no degenerada. (Ver Auxiliar 5, Problema 3, Pregunta II.b)

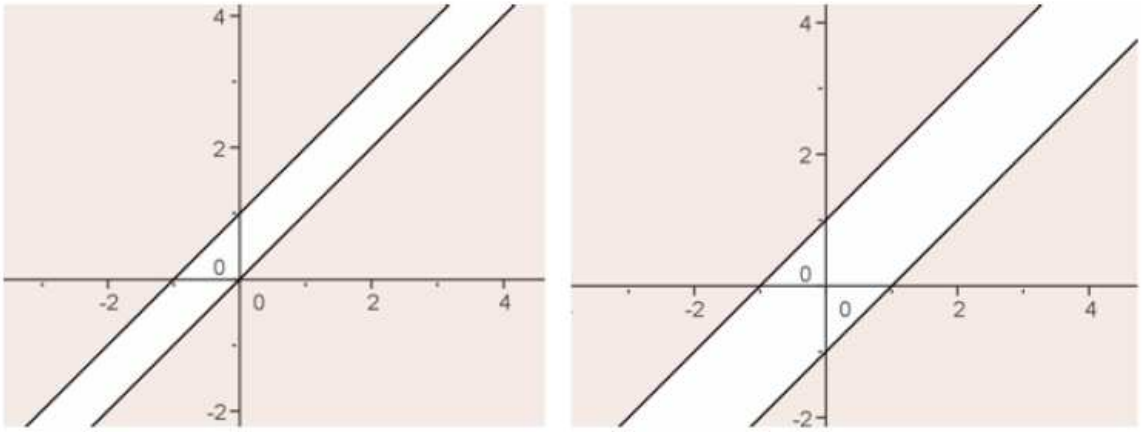
5. Por ejemplo, el siguiente problema primal es infactible:

$$\begin{aligned} \text{máx}\, z &= x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 0 \\ x_1 - x_2 &\leq -1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

y su dual también es infactible:

$$\begin{aligned} \text{mín}\, w &= -y_2 \\ -y_1 + y_2 &\geq 1 \\ y_1 - y_2 &\geq 1 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Gráficamente se puede observar lo anterior:



Primal Dual

6. a) Si la variable x_k no es básica, la modificación de c_k sólo afecta a $\overline{c_k}$. En cambio si la variable x_k es básica, la modificación afecta a todos los costos reducidos de las variables no básicas. Si la base óptima cambia, se debe aplicar el algoritmo Simplex a partir de la base óptima del problema original. El punto óptimo es factible para el nuevo problema porque no fue modificado el conjunto de restricciones.

   b) Hay que chequear si se cumple que: $\bar{b} = B^{-1}b \geq 0$. Cuando b cambia, el punto óptimo cambia porque es dependiente del vector de lado derecho.

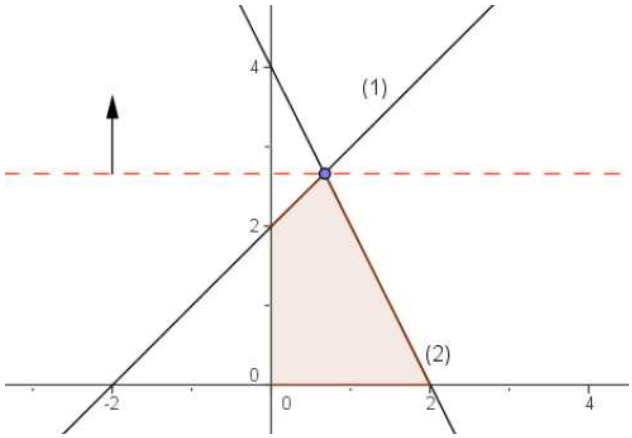
   Si cambia la base óptima es porque no se cumplió $\bar{b} = B^{-1}b \geq 0$. Por lo tanto, no se puede partir iterando del óptimo del primal porque el punto dejo de ser factible. Sin embargo, se puede aplicar Simplex en el dual del problema original partiendo del óptimo del dual original (en el dual no se pierde factibilidad).

Problema 2

1. Gráficamente podemos concluir que el punto óptimo se encuentra en la intersección de las restricciones (1) y (2):

$$x_2 \leq 2 + x_1$$
$$x_2 \leq 4 - 2x_1$$

Luego el punto óptimo es: $(x_1^*, x_2^*) = (2/3, 8/3)$. Por lo tanto el valor óptimo de la función objetivo está dado por $z^* = 8/3$.



2. El problema dual está dado por:

$$\begin{aligned} &\text{mín} \quad 2y_1 + 4y_2 \\ &s.a. \\ &\quad -y_1 + 2y_2 \geq 0 \\ &\quad y_1 + y_2 \geq 1 \\ &\quad y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Usando Holgura-Complementaria:

$$(-x_1^* + x_2^* - 2)y_1^* = 0$$
$$(2x_1^* + x_2^* - 4)y_2^* = 0$$

$$(0 + y_1^* - 2y_2^*)x_1^* = 0$$
$$(1 - y_1^* - y_2^*)x_2^* = 0$$

Como x_1^* y x_2^* son distintos de cero se debe cumplir que:

$$y_1^* - 2y_2^* = 0$$
$$1 - y_1^* - y_2^* = 0$$

Luego el punto óptimo es: $(y_1^*, y_2^*) = (2/3, 1/3)$. Por lo tanto el valor óptimo de la función objetivo está dado por $w^* = 8/3$, verificando $w^* = z^*$.

3. El problema debe ser transformado a su forma estándar:

$$\begin{aligned} &\text{mín} \quad -x_2 \\ &s.a. \\ &\quad -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ &\quad 2x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ &\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Para chequear el óptimo primal debemos verificar que se cumplan las condiciones de optimalidad de simplex. Habíamos encontrado que el óptimo se encuentra en el punto $(x_1, x_2) = (2/3, 8/3)$, por lo tanto la base debe estar conformada por las variables x_1 y x_2.

$$B = [x_1, x_2] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Vemos que efectivamente se cumple las condiciones de factibilidad y de optimalidad:

$$x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\overline{c}_R^T = c_R^T - c_B^T B^{-1} R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \geq 0$$

Luego el óptimo encontrado gráficamente verifica las condiciones de optimalidad de simplex.

4. Según simplex, se debe seguir cumpliendo que: $\overline{c}_R^T = c_R^T - c_B^T B^{-1} R \geq 0$.

$$\overline{c}_R^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -c_1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2 - c_1) & \frac{1}{3}(c_1 + 1) \end{pmatrix} \geq 0$$

Entonces se debe cumplir que $c_1 \leq 2$ y $c_1 \geq -1$. Luego, para que el óptimo siga siendo el mismo $-1 \leq c_1 \leq 2$.

5. Según simplex, se debe seguir cumpliendo que: $B^{-1} \cdot b$.

$$B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}b_1 + \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3}b_1 + \frac{4}{3} \end{pmatrix} \geq 0$$

Entonces se debe cumplir que $b_1 \leq 4$ y $b_1 \geq -2$. Luego, para que el óptimo siga siendo el mismo $-2 \leq b_1 \leq 4$.

6. Si la restricción (2) es cambiada por $2x_1 + x_2 \geq 4$ es posible observar, en el gráfico, que el problema se vuelve no acotado. Luego, como resultado del teorema débil de dualidad, es posible concluir que como el problema primal es no acotado entonces el dual es infactible.

Problema 3

1. Sea X_i la cantidad de producto tipo i que producirá la firma. El problema primal queda dado por:

$$\text{máx } 3 \cdot X_1 + 7 \cdot X_2 + 5 \cdot X_3$$

s.a.

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 &\leq 50 \\ 2 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 + X_3 &\leq 100 \\ X_1, X_2, X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. El problema dual queda dado por:

$$\text{mín } 50 \cdot Y_1 + 100 \cdot Y_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} Y_1 + 2 \cdot Y_2 &\geq 3 \\ Y_1 + 3 \cdot Y_2 &\geq 7 \\ Y_1 + \ Y_2 &\geq 5 \\ Y_1, Y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Gráficamente, se puede ver que en el óptimo las restricciones activas en el dual son la segunda y la tercera. Despejando se obtiene $Y_1^\star = 4$, $Y_2^\star = 1$, los valores óptimos de las variables duales, lo que corresponde a *los precios sombra* de las restricciones del primal. Así, se estará dispuesto a pagar 4$ por un kilo más de azúcar y 1$ por un kilo más de chocolate.

La interpretación económica es la del *comprador* de insumos, el que desea pagar el mínimo precio por el azúcar y chocolate, asegurándose que a su actual dueño (el productor de dulces) le sea indiferente realizar la producción óptima o vender los insumos.

3. Utilizando el teorema de holgura complementaria, vemos que la variable primal asociada a la primera restricción del dual, $X_1^\star$ deberá ser igual a cero. De la misma manera X_2 y X_3 serán mayor o igual a cero. Resolviendo el sistema se obtiene $X_2^\star = X_3^\star = 25$ con un $Z^\star = W^\star = 300$.

   La base asociada a esta solución optima será $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, donde $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

4. Necesitamos que X_1 continúe siendo variable no básica. Esto, en el caso de un problema de maximización con variables no negativas, es equivalente a que el costo reducido asociado sea menor o igual que cero.

$$CR_1 = C_1 - \begin{pmatrix} 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \leq 0$$

   Así $C_1 \leq 6$ asegura mantener la base óptima.

5. Al aumentar el lado derecho, aseguramos que se mantiene la factibilidad y la base óptima. Así la solución básica óptima estará dada por $B^{-1} \cdot b$.

$$X^\star = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix}$$

   De esta manera $Z^\star = 340$.

   Se mantiene la factibilidad pues la base óptima se mantiene factible mientras b_1 valga entre 100/3 y 100. Esto pues:

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}b_1 + 50 \\ \frac{3}{2}b_1 - 50 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{matrix} b_1 \leq 100 \\ b_1 \geq \frac{100}{3} \end{matrix}$$

6. Dado que estoy agregando una variable el nuevo óptimo será *mayor o igual* al actual, puesto que si fijamos X_4 en cero, la solución actual sigue siendo factible.

   Si calculamos el costo reducido de la nueva variable, para que pertenezca a la base, NO deberá ser óptima, es decir, $CR_4 \geq 0$.

$$CR_4 = 17 - \begin{pmatrix} 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

   Otra manera de verlo, es darse cuenta que agregar una variable en el primal es equivalente a agregar una restricción en el dual. La restricción que debe agregarse es:

$$3 \cdot Y_1 + 4 \cdot Y_2 \geq 17$$

   la que intersecta a las 2 restricciones que actualmente son activas, por lo que en el óptimo, esta será activa y la variable primal X_4 mayor que cero.

Problema 4

Variables: **(0,75)**

$X_{ij}\begin{cases} 1 & \text{Si va desde la estación i a la estación j.} \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$ **(0,2)**

$Y_{ij}\begin{cases} 1 & \text{Si va desde la estación i a la estación j en bus.} \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$ **(0,1)**

$Z_{ij}\begin{cases} 1 & \text{Si va desde la estación i a la estación j en taxi.} \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$ **(0,1)**

$R_{ij}\begin{cases} 1 & \text{Si va desde la estación i a la estación j en metro.} \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$ **(0,1)**

$d_i\begin{cases} 1 & \text{Si busca la pista en la estación i.} \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$ **(0,25)**

O bien

$X_{ijk}\begin{cases} 1 & \text{Si va desde la estación i a la estación j en el medio k.} \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$ **(0,5)**

$d_i\begin{cases} 1 & \text{Si busca la pista en la estación i.} \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$ **(0,25)**

Restricciones:

$$\sum_{j=1}^{P} X_{ij} \leq 1 \qquad \forall i = 2,...,P \quad \text{o} \quad \sum_{j=1}^{P}\sum_{k=1}^{3} X_{ijk} \leq 1 \qquad \forall i = 2,...,P$$

Se sale a lo más una vez de cada estación **(0,3)**.

$$\sum_{i=1}^{P} X_{ij} \leq 1 \qquad \forall j = 2,...,P \quad \text{o} \quad \sum_{i=1}^{P}\sum_{k=1}^{3} X_{ijk} \leq 1 \qquad \forall i = 2,...,P$$

Se entra a lo más una vez de cada estación **(0,3)**.

 # En las dos restricciones anteriores es de extrema importancias el ≤, ya que no es necesario recorrer todas las estaciones. Si lo ponen con igualdad está MALO.

$$\sum_{j=1}^{P} X_{1j} = 1 \quad \text{o} \quad \sum_{j=1}^{P}\sum_{k=1}^{3} X_{1jk} = 1$$

De la estación 1 se sale exactamente una vez **(0,3)**.

$$X_{E1} = 1 \quad \text{o} \quad \sum_{k=1}^{3} X_{E1k} = 1$$

De la estación E se va directamente a la 1 **(0,3)**.

$$\sum_{i=1}^{P} X_{iE} = 1 \quad \text{o} \quad \sum_{i=1}^{P}\sum_{k=1}^{3} X_{iEk} = 1$$

A la estación E se llega exactamente 1 vez **(0,3)**.

$$X_{ij} = 0 \qquad \forall i = j \quad \text{o} \quad \sum_{k=1}^{3} X_{ijk} = 0 \qquad \forall i = j$$

Esta restricción puede reemplazarse especificando en las demás restricciones que las sumatorias son para i≠j **(0,3)**.

$$Y_{ij} + Z_{ij} + R_{ij} = X_{ij} \qquad \forall i, j \quad \text{o} \quad \sum_{k=1}^{3} X_{ijk} \leq 1 \qquad \forall i, j$$

Solamente se utiliza uno de los tres medios de viaje, si es que se viaja **(0,3)**.

$$\sum_{i,j}^{P} Z_{ij} \leq T$$ o $$\sum_{i,j}^{P} X_{ij2} \leq T$$

No pueden usarse más de T taxis **(0,3)**.

$$\sum_{i,j}^{P} R_{ij} \leq M$$ o $$\sum_{i,j}^{P} R_{ij3} \leq M$$

No pueden usarse más de M metros **(0,3)**.

$$\sum_{i}^{P} d_i = D$$ $$\sum_{i}^{P} d_i = D$$

Deben tenerse D pistas. Esta restricción podría se mayor o igual a D, ya que el óptimo entregará la igualdad **(0,3)**.

$$d_1 = d_E = 0$$ $$d_1 = d_E = 0$$

No se buscan pistas ni en 1 ni en E, ya que no hay **(0,2)**.

$$d_i \leq \sum_{j}^{P} X_{ij} \quad \forall i$$ o $$d_i \leq \sum_{j}^{P} \sum_{k=1}^{3} X_{ijk} \quad \forall i$$

No se pueden buscar pistas en estaciones que no se visitaron **(0,3)**.

$$\sum_{i \in S \neq E, j \in S \neq E} X_{ij} \leq card(S) - 1$$ o $$\sum_{i \in S \neq E, j \in S \neq E} \sum_{k=1}^{3} X_{ijk} \leq card(S) - 1$$

con S todos los subconjuntos de la P estaciones.

No se pueden formar subciclos entre las estaciones. **Ojo que si se forman subciclos con la estación E (de hecho el óptimo es un subciclo) por lo que es de suma importancia que lo excluyan, sino lo hacen poner la mitad del puntaje (0,5)**.

$R_{2i-1,2j-1} = 0 \qquad \forall i, j = 1,...,P/2$ o

$X_{2i-1,2j-1,3} = 0 \qquad \forall i, j = 1,...,P/2$

No se pueden tomar metros entre estaciones NO-congruentes. **(0,5)**.

 # Los $\forall$ son muy importantes, descontar 0,1 en cada restricción que no se especifiquen.

Función Objetivo: **(0,75)**

$$\min z = \sum_{i,j}^{P} Y_{ij} \cdot b_{ij} + \sum_{i,j}^{P} Z_{ij} \cdot t_{ij} + \sum_{i,j}^{P} R_{ij} \cdot m_{ij} + \sum_{i}^{P} d_i \cdot h_i$$ o

$$\min z = \sum_{i,j}^{P} X_{ij1} \cdot b_{ij} + \sum_{i,j}^{P} X_{ij2} \cdot t_{ij} + \sum_{i,j}^{P} X_{ij3} \cdot m_{ij} + \sum_{i}^{P} d_i \cdot h_i$$