INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

IN34A – Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Auxiliares: André Carboni
Leonardo López
Rodrigo Wolf

CTP 2 miércoles 7 de mayo de 2008

El dedicado ingeniero de la Universidad de Chile Leonsio Carbonato Lobos tiene dos proyectos en mente. El proyecto 1 tiene relación con tecnologías de la información, mientras que el 2 se relaciona con gestión de operaciones. Por cada hora que Leonsio le dedica al proyecto 1 él debe invertir 1 u.m. (unidades monetarias), mientras que por cada hora que le dedica al segundo proyecto Carbonato debe invertir 5 u.m., nuestro amigo cuenta en total con 100 u.m. para invertir. Por su parte cada hora dedicada a la alternativa 1 le significa 1 u.e. (unidad de esfuerzo) a este dedicado ingeniero, mientras que cada hora de trabajo del otro proyecto le significa 2 u.e. Carbonato Lobos cuenta en total con 50 u.e. A su vez es sabido que Leoncio dispone de 40 horas en total para dedicarle a ambos proyectos. Por ultimo cada hora dedicada al proyecto 1 le significa 1 u.a. (unidad de alegría) a nuestro amigo, mientras que cada hora dedicada al segundo equivalen a 4 u.a. Él quiere maximizar su alegría.

Su misión en este ctp es responder las siguientes preguntas que le permitirán a Leonsio Carbonato Lobos saber cuento tiempo le debe dedicar a cada proyecto.

1) Plantee el PPL (0,4 ptos)
2) Resuelva el problema utilizando Simplex, toma como base inicial la formada por las columnas asociadas a las variables de holgura. (3,3 ptos)
3)
a) ¿Cuál es el optimo del problema? (0,25 ptos)
b) ¿Cuánto vale la función objetivo en dicho punto? (0,25 ptos)
c) ¿Cuáles son los recursos limitantes? (0,25 ptos)
d) ¿le sobra algún recurso? Si es así ¿cuál y cuanto? (0,25 ptos)

4) Grafique el problema (0,3 ptos)
5) Si se varían de forma simultanea los coeficientes de la función objetivo, ¿qué relación debe cumplirse entre estos para que el punto optimo no varié? (1 pto)

No se puede usar calculadora

Las siguientes matrices con sus respectivas inversas pueden serles de utilidad

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{-2}{5} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{-4}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{-4}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN

1)

$$\text{MAX} \quad X_1 + 4X_2$$

s.a.

$$X_1 + 5X_2 \leq 100$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 50$$
$$X_1 + X_2 \leq 40$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

X_1 = # DE HORAS DEDICADAS A PROYECTO 1

X_2 = # DE HORAS DEDICADAS A PROYECTO 2

2) y 3)

$$\text{MIN} \quad -(X_1 + 4X_2)$$

s.a.

$$X_1 + 5X_2 + X_3 = 100$$
$$X_1 + 2X_2 + X_4 = 50$$
$$X_1 + X_2 + X_5 = 40$$
$$X_i \geq 0$$

LUEGO

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = I \quad ; \quad B^{-1} = I \quad ; \quad \bar{b} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$R = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad ; \quad \bar{R} = B^{-1} \cdot R = R$$

LUEGO CALCULAMOS LOS COSTOS REDUCIDOS DE LAS VARIABLES NO BASICAS

$$\bar{C}_R^T = C_R^T - C_B^T \cdot \bar{R}$$
$$= (-1 \quad -4) - (0 \quad 0 \quad 0)\,\bar{R} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \\ (-1 \quad -4) \end{array}$$

$\therefore$ NO ESTAMOS EN EL OPTIMO. POR SU PARTE EL COSTO REDUCIDO MÁS NEGATIVO ESTA ASOCIADO A X_2, LUEGO ESA ENTRA.

AHORA HAY QUE VER LA SALIDA:

$$\underset{\bar{a}_{i2} > 0}{\text{MIN}} \left\{ \overset{x_3}{\frac{100}{5}}, \overset{x_4}{\frac{50}{2}}, \overset{x_5}{\frac{40}{1}} \right\} \qquad \therefore \text{ SALE LA COLUMNA ASOCIADA A } X_3$$

LUEGO:

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_2 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad ; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{b} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$R = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad ; \quad \bar{R} = B^{-1} \cdot R = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

LUEGO EL COSTO REDUCIDO QUEDA ASÍ:

$$\bar{C}_R^T = (-1 \quad 0) - (-4 \quad 0 \quad 0) \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{bmatrix} = (-1 \quad 0) + \left(\frac{4}{5} \quad \frac{4}{5}\right) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_3 \end{array} \\ \left(-\frac{1}{5}\ ,\ \frac{4}{5}\right) \end{array}$$

NO ESTAMOS EN EL OPTIMO, HAY UN COSTO REDUCIDO NEGATIVA, POR ENDE LA COLUMNA ASOCIADA A X_1 ENTRA A LA BASE.

SALE: $\min\limits_{a_{i1}>0} \left\{ \overset{x_2}{\frac{20}{1/5}}, \overset{x_4}{\frac{10}{3/5}}, \overset{x_5}{\frac{20}{4/5}} \right\} = \min \left\{ 100, \frac{50}{3}, \frac{100}{4} \right\}$ ∴ SALE LA COLUMNA ASOCIADA A X_4

LUEGO:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_1 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad ; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -2/3 & 5/3 & 0 \\ \frac{1}{3} & -4/3 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{b} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 50/3 \\ 50/3 \\ 20/3 \end{pmatrix} \geq \emptyset$$

$$R = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_4 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad ; \quad \bar{R} = B^{-1} \cdot R = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 5/3 & -2/3 \\ -4/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

EL COSTO REDUCIDO QUEDA ASÍ:

$$\bar{C}_R^T = (0 \quad 0) - (-4 \quad -1 \quad 0) \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 5/3 & -2/3 \\ -4/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}\right) \geq \vec{0}$$

∴ ESTAMOS EN EL OPTIMO!

EL PUNTO OPTIMO ES $X_1 = 50/3 \quad X_2 = 50/3 \quad X_3 = X_4 = 0 \quad X_5 = 20/3$

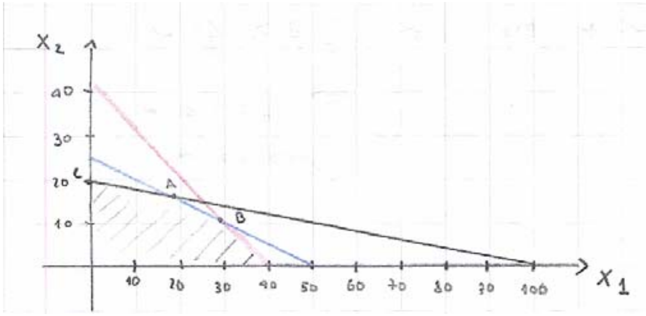
EL VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO ES $83,\bar{3}$ (EN EL PROBLEMA ORIGINAL)

EL DINERO Y LA ENERGÍA SON LOS RECURSOS LIMITANTES, SUS RESTRICCIONES SON ACTIVAS, MIENTRAS QUE TPO LE SOBRA. LE SOBRAN $\frac{20}{3}$ HRS.

En la parte de Simplex son 0,3 por llevar el problema a la forma estándar. 1,25 por saber como opera el algoritmo y 1,75 por hacer bien las iteraciones.

En la parte 3) lo importante es saber de donde salieron los resultados, vale decir, si por ejemplo el optimo le dio mal y las restricciones 2 y 3 salen como las activas y que le sobra de 1 y responde eso, tomarlo como bueno ya que el descuento se hizo antes.

4)



5)

EN EL GRÁFICO SE VE QUE AL VARIAR LA PENDIENTE DE LA F.O. EL OPTIMO VARIARÁ ENTRE B O C. LUEGO HAY QUE VARIAR LA PENDIENTE HASTA QUE ESTO NO OCURRA, LO QUE SE TRADUCE EN QUE DEBE CUMPLIRSE:

$$F.O.(A) \geq F.O.(B) \quad \wedge \quad F.O(A) \geq F.O.(C)$$

PARA EL PROBLEMA EL VALOR DE X_1 Y X_2 EN CADA PUNTO ES:

EN A $(50/3, 50/3)$; EN B $(30, 10)$; EN C $(0, 20)$

ACÁ LO QUE SE PIDE ES VER QUE RELACIÓN DEBEN CUMPLIR AMBOS COEFICIENTES TAL QUE EL OPTIMO NO VARIE. ASÍ TENEMOS:

$$(\alpha \quad \beta)\begin{pmatrix} 50/3 \\ 50/3 \end{pmatrix} \geq (\alpha \quad \beta)\begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix} \iff \alpha \frac{50}{3} + \beta \frac{50}{3} \geq 30\alpha + 10\beta$$

$$\iff \frac{20}{3}\beta \geq \frac{40}{3}\alpha \iff \boxed{\beta \geq 2\alpha}$$

POR SU PARTE:

$$(\alpha \quad \beta)\begin{pmatrix} 50/3 \\ 50/3 \end{pmatrix} \geq (\alpha \quad \beta)\begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} \iff \alpha \frac{50}{3} + \beta \frac{50}{3} \geq 20\beta$$

$$\iff \alpha \frac{50}{3} \geq \frac{10}{3}\beta \iff \boxed{5\alpha \geq \beta}$$

$\therefore$ DEBE CUMPLIRSE $\beta \geq 2\alpha \quad \wedge \quad 5\alpha \geq \beta$, ie, $\frac{\beta}{2} \geq \alpha \geq \frac{\beta}{5}$