Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A: Clase Auxiliar

Dualidad y Análisis de Sensibilidad

Marcel Goic F.[1]

[1]Esta es una versión bastante preliminar por lo que puede contar con numerosas faltas de ortografía y errores no forzados. Si encuentran alguno favor de denunciarlo a mgoic@ing.uchile.cl

1. Una brevísima introducción.

Encontrar el óptimo de un problema de optimización, es solo una parte del proceso de solución. Muchas veces nos interesará saber como varía la solución si varía alguno de los parámetros del problema que frecuentemente se asumen como determinísticos, pero que tienen un caracter intrínsicamente aleatorio. Más especificamente nos interesará saber para que rango de los parámetros que determinan el problema sigue siendo valida la solución encontrada.

Otro aspecto interesante es el tema de *dualidad*. Dualidad resulta de buscar relaciones que permitan obtener información adicional de un problema de optimización general. Esto, traducido a PL nos conduce a relaciones primal-dual. Además veremos algunos teoremas útiles de dualidad y el concepto de precio sombra.

2. Acerca de Dualidad

Todo problema de optimización (primal), tiene un problema asociado (dual) con numerosas propiedades que los relacionan y nos permiten hacer un mejor análisis de los problemas. A continuación se describen los resultados que se ocuparán en la resolución de los problemas.

2.1. Construcción del problema dual

Bastante en general, para encontrar el dual de un problema lineal:

1. Si es problema de minimización el dual será de maximización y viceversa.
2. En el dual habrá tantas variables como restricciones [2] en el primal.
3. En el dual habra tantas restricciones como variables en el primal.
4. Los coeficientes de la función objetivo del dual vendrán dados por los coeficientes del lado derecho de las restricciones del primal.
5. Los coeficientes del lado derecho del dual vendrán dados por los coeficientes de la función objetivo del primal.
6. Los coeficientes que acompañarán a las variable en una restriccion del dual corresponderán a aquellos coeficientes que acompañan a la variable primal correspondiente a la restriccion dual [3].
7. Para saber si las restricciones duales son de $\leq$, $=$ ó $\geq$, se recurre a la tabla de relaciones primal-dual.

[2]Suponemos restricciones l.i

[3]O si se prefiere, los coeficeintes serán el resultado de transponer la matriz A de coeficientes

8. Para saber si las variables duales son ≤ 0, $= 0$ ó ≥ 0, se recurre a tabla de relaciones primal dual.

Relaciones Primal-Dual

Estas relaciones nos permiten pasar de un problema de primal a su dual en forma bastante algorítmica, tanto para problemas de minimización como de maximización.

PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN	PROBLEMA DE MAXIMIZACIÓN
Restricciones	**Variables**
$\geq$	≥ 0
$=$	Irrestricta
$\leq$	≤ 0
Variables	**Restricciones**
≥ 0	$\leq$
Irrestricta	$=$
≤ 0	$\geq$

2.2. Algunos teoremas de dualidad

Consideremos el siguiente par primal-dual:

$$\begin{array}{llrcl} (P) & \text{mín} & z & = & c \cdot x \\ & s.a & A \cdot x & \geq & b \\ & & x_i & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{llrcl} (D) & \text{máx} & w & = & y \cdot b \\ & s.a & A^t \cdot y & \leq & c \\ & & y_i & \geq & 0 \end{array}$$

- Teorema Débil de Dualidad

  Si $\bar{x}$ e $\bar{y}$ son factibles para (P) y (D) respectivamente, entonces $z(\bar{x}) \geq w(\bar{y})$.

- Teorema Fundamental de Dualidad[4]

  Dados un par de problemas primal-dual, si uno de ellos admite solución óptima, entonces el otro tambien la admite y los respectivos valores óptimos son iguales.

- Teorema de Holgura Complementaria

  Sea $\begin{bmatrix} \beta_{\cdot 1} & \beta_{\cdot 2} & \cdots & \beta_{\cdot n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1\cdot} \\ \alpha_{2\cdot} \\ \vdots \\ \alpha_{m\cdot} \end{bmatrix}$ una matriz de m filas y n columnas.

  Sea el par primal-dual siguiente:

[4] También conocido como teorema fuerte de dualidad

$$(P) \quad \begin{array}{lrcl} \text{mín} & z & = & c \cdot x \\ \text{s.a} & \alpha_i \cdot x & \geq & b_i \\ & x_i & \geq & 0 \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{lrcl} \text{máx} & w & = & y \cdot b \\ \text{s.a} & \beta_j \cdot y & \leq & c_j \\ & y_i & \geq & 0 \end{array}$$

Sean $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soluciones factibles para los problema (P) y (D) respectivamente. $\bar{x}$ e $\bar{y}$ son óptimos si y solo si:

I) $(\alpha_i \cdot \bar{x} - b_i) \cdot \bar{y}_i = 0$ i=1,...,m.

II) $(c_j - \bar{y} \cdot \beta_j) \cdot \bar{x}_j = 0$ j=1,...,n.

Obs: Notar que $(\alpha_i \cdot \bar{x} - b_i)$ y $(c_j - \bar{y} \cdot \beta_j)$ son las variable de holgura de los problemas (P) y (D) respectivamente.

2.3. Acerca de los precios sombra

Los valores de las variables duales en el óptimo tienen una interpretación económica interesante en problemas de programación lineal: Corresponde a las tasas marginales de variación del valor de la función objetivo ante variaciones unitarias del lado derecho de una restricción. Por este motivo se le llama precio sombra al vector de variables duales en el óptimo.

3. Acerca de sensibilidad

Como ya se dijo, nos interesa ver como se ve afectada la solución de un problema de optimización si cambia alguno de los parámetros del problema. En este ámbito, podemos distinguir 2 tipos de análisis:

- Analisis de sensibilidad: Consiste en determinar cual es el rango de variación de los parámetros del problema de modo que la base óptima encontrada siga siendo óptima.
- Analisis post optimal: Consiste en determinar como varía la base óptima si cambia alguno de los parámetros del problema.

En la presente sesión nos concentraremos en análisis de sensibilidad dejando el análisi post optimal para un poco mas adelante.

Consideremos la forma estandar siguiente:

$$(P) \quad \begin{array}{lrcl} \text{mín} & z & = & c \cdot x \\ \text{s.a} & A \cdot x & = & b \\ & x & \geq & \vec{0} \end{array}$$

Sea B la base óptima. Nos interesa estudiar el rango de variación de los parametros c y b de modo que B siga siendo óptima [5].

- Variación en el parametro b.

  Buscamos el rango en el que puede tomar valores b de modo que la base B siga siendo óptima. Para ello debemos verificar:

  1. Factibilidad: $x_B = B^{-1}b \geq 0$
  2. Optimalidad: $\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R \geq 0$

  Como en la ecuación 2. no hay dependencia explicita de b, no impone condiciones y por tanto solo debemos verificar 1.

- Variaciones en el parametro c

  Buscamos el rango en el que puede tomar valores c de modo que la base B siga siendo óptima. Para ello debemos verificar:

  1. Factibilidad: $x_B = B^{-1}b \geq 0$
  2. Optimalidad: $\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R \geq 0$

  Como en la ecuación 1. no hay dependencia explicita de b, no impone condiciones y por tanto solo debemos verificar 2. Notemos que al variar un coeficiente de c_j a $\hat{c}_j$ e imponer la condición 2. surgen dos casos:

  - Caso 1: variable x_j es no básica.
    $\bar{c}_j = \hat{c}_j - c_B B^{-1} \beta_j$ cambia.
    $\bar{c}_k = c_k - c_B B^{-1} \beta_k$ no cambia $(i \neq j)$.

    Por lo tanto sólo tenemos que imponer 1 ecuación: la de costo reducido asociado a variable que cambió.

  - Caso 2: variable x_j es básica.
    $\bar{c}_k = \bar{c}_k - \hat{c}_B B^{-1} \beta_k$ puede cambiar $\forall\, k$.

    Por lo tanto, no basta con examinar una única ecuación y se debe inspeccionar todas las ecuaciones de costo reducido. Así:

    - Si cambia c_j de variable no básica se impone $\bar{c}_j \geq 0$.
    - Si cambia c_j de variable básica se impone $\bar{c}_k \geq 0 \,\forall\, x_k$ no básica.

⊙

[5] En rigor, tambien podría interesarnos estudiar otras situaciones como por ejemplo variaciones en los coeficientes de la matriz A, o que pasaría si agregamos una nueva variable, etc. Sin embargo, por el momento sólo estudiaremos estos 2 casos clásicos

4. Problemas

4.1. Problema 1

Una florista sabe hacer solo 2 tipos distintos de arreglos florales (x_1 y x_2) para los cuales dispone de 3 tipos distintos de flores: rozas, tulipanes e ibizcos. Los requerimientos de flores para cada arreglo, la disponibilidad de flores y los precios de cada arreglo vienen dados por:

FLORES	x_1	x_2	**DISPONIBILIDAD**
Rozas	3	1	300
Tulipanes	1	1	140
Ibizcos	1	3	300
PRECIO	2000	1000	-

1. Formule un PPL que resuelva el problema de maximización de ingresos por ventas sujeto a la disponibilidad de recursos.

2. ¿Cual es el problema dual asociado? ¿Que situación podría estar optimizando?

3. Usando el teorema de holgura complementaria, encuentre el óptimo del problema dual sabiendo que el óptimo primal viene dado por ($x_1 = 80$, $x_2 = 60$).

4. Suponga que retorna frustrado después que una bella dama le cerrara la puerta cuando usted le llevaba amablemente una rosa, un tulipán y un ibizco [6]. Si se encuentra con la florista, ¿Cuanto cree que estaría dispuesta a pagar ella por sus flores?

Solución

1. A estas alturas del curso, todos debieran de poder modelar un problema tan sencillo como este por lo que ahorraré comentarios:

$$\text{máx } z = 2000x_1 + 1000x_2$$

$$\begin{array}{rrcl} s.a & 3x_1 + x_2 & \leq & 300 \\ & x_1 + x_2 & \leq & 140 \\ & x_1 + 3x_2 & \leq & 300 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

[6] Dependiendo el caso, puede alternativamente imaginar que es usted una bella dama quien cerró la puerta a un apuesto varon sin antes haberse quedado con las flores :)

2. Para encontrar el dual, procedemos como se describió en la introducción teorica de esta clase aplicando las relaciones de dualidad:

$$\min\ w = 300y_1 + 140y_2 + 300y_3$$

$$\begin{array}{rrcl} s.a & 3y_1 + y_2 + y_3 & \geq & 2000 \\ & y_1 + y_2 + 3y_3 & \geq & 1000 \\ & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

   Esta formulación resuelve el problema de un agente externo que quiere saber que precio unitario ofrecer por cada una de las flores si quiere comprarle todas las flores a la florista. Así, y_1, y_2 e y_3 son los precios asociados a las rozas, tulipanes e ibizcos.

3. La florista ha encontrado su combinación óptima ($\bar{x}_1 = 80, \bar{x}_2 = 60$). Sabemos que en el óptimo se cumple el teorema de holgura complementaria. Entonces, podemos aplicarlo:

   a) $(3\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 300) \cdot \bar{y}_1 = 0$
   b) $(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 140) \cdot \bar{y}_2 = 0$
   c) $(\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 - 300) \cdot \bar{y}_3 = 0$
   d) $(2000 - 3\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \bar{y}_3) \cdot \bar{x}_1 = 0$
   e) $(1000 - \bar{y}_1 - \bar{y}_2 - 3\bar{y}_3) \cdot \bar{x}_2 = 0$

   Como $\bar{x}_1 = 80$ y $\bar{x}_2 = 60$, se tiene que:

   a) $\Rightarrow \bar{y}_1 \in R$
   b) $\Rightarrow \bar{y}_2 \in R$
   c) $\Rightarrow \bar{y}_3 = 0$
   d) $\Rightarrow 3\bar{y}_1 + \bar{y}_2 = 2000$
   e) $\Rightarrow \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = 1000$

   Resolviendo el sistema:

$$\bar{y}_1 = 500 \qquad \bar{y}_2 = 500 \qquad \bar{y}_3 = 0$$

   Notar que $z(\bar{x}) = w(\bar{y}) = 220000$

   ¿Como se interpreta esto?. La florista venderá rosas y tulipanes a un precio de \$500 cada una y entregará como *oferta* los ibizcos gratis, pero esto solo si se vende todo como un paquete. Esto toma sentido pues si vende todas las rosas y tulipanes (dado que solo sabe hacer los arreglos florales descritos) no podrá sacarle provecho alguno a los ibizcos.

4. Asumiendo los paradigmas de competencia perfecta[7], la florista ofrecerá por las flores una cantidad identica a lo que ella ganaría por ellas. Este valor viene dado nuevamente por los óptimos duales o precios sombras:

$$\bar{y}_1 = 500 \qquad \bar{y}_2 = 500 \qquad \bar{y}_3 = 0$$

   En efecto y para reforzar lo dicho, en el óptimo se tendrá que:

$$\begin{aligned} z^* &= c_B B^{*-1} b - \sum_{\text{no básica}} \bar{c}_R x_R \\ &= \pi^* b - \sum_{\text{no básica}} \bar{c}_R \cdot x_R \end{aligned}$$

   Entonces

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = c_B B^{*-1}_{\cdot i} = \pi^*_i$$

$\odot$

4.2. Problema 2

Considere el clásico problema de combinación de productos sujeto a restricciones de disponibilidad de recursos:

$$\begin{array}{rrcl} & \text{máx } z = x_1 + 3x_2 & & \\ s.a & x_1 + 4x_2 & \leq & 100 \\ & x_1 + 2x_2 & \leq & 60 \\ & x_1 + x_2 & \leq & 50 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

1. Realice un análisis de sensibilidad para el vector del lado derecho de las restricciones.
2. Realice un análisis de sensibilidad para el vector de coeficientes de la función objetivo.
3. Suponga que se evalua la posibilidad de fabricar un nuevo producto x_{nuevo} de modo que el problema queda descrito como

$$\text{máx } z = x_1 + 3x_2 + x_{nuevo}$$

$$\begin{array}{rrcl} s.a & x_1 + 4x_2 + 5x_{nuevo} & \leq & 100 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_{nuevo} & \leq & 60 \\ & x_1 + x_2 + 2x_{nuevo} & \leq & 50 \\ & x_1, x_2, x_{nuevo} & \geq & 0 \end{array}$$

[7] Es decir, que el precio de transacción de un bien es tal todos los agentes quedan indiferentes

¿Sigue siendo óptima la solución anteriormente planteada?

Hint: En el óptimo, la base esta formada por las variables x_1, x_2 y x_5, en donde se han asignado las variables x_3, x_4 y x_5 como holgura de las restricciones según el orden enunciado.

Solución

Antes de cualquier cosa, pasamos a forma estandar:

$$\text{mín } \tilde{z} = -x_1 - 3x_2$$

$$\begin{array}{rrcl} s.a & x_1 + 4x_2 + x_3 & = & 100 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 & = & 60 \\ & x_1 + x_2 + x_5 & = & 50 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

De la indicación.

$$B^* = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow B^{*-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Ante variaciones de b, ya dijimos que solo tenemos que verificar factibilidad:

$$B^{*-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

Un análisis general nos conduciría a un espacio de soluciones en R^3. Sin embargo, lo usual es analizar la variación de la disponibilidad de un recurso dejando los otros constantes (*ceteris paribus*).

- $\underline{b_1}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 + 120 \\ \frac{b_1}{2} - 30 \\ \frac{b_1}{2} - 40 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

Entonces, la inecuación vectorial nos entrega 3 inecuaciones escalares que finalmente imponen que:

$$80 \leq b_1 \leq 120$$

- $\underline{b_2}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ b_2 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100+2b_2 \\ 50-\frac{b_2}{2} \\ 50-\frac{3b_2}{2}+500 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

Entonces, la inecuación vectorial nos entrega 3 inecuaciones escalares que finalmente imponen que:

$$50 \leq b_2 \leq \frac{200}{3}$$

- $\underline{b_3}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100+120 \\ 50-30 \\ 50-90+b_3 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

Entonces, la inecuación vectorial nos entrega sólo una inecuación con dependencia de b_3, la que nos dice que:

$$b_3 \leq 40$$

2. Como ya se argumentó, ahora solo nos preocuparemos de la condición de optimalidad: $\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R \geq 0$. Al igual que el caso anterior, se estudiará la sensibilidad de los parametros independientemente.

- $\underline{c_1}$: x_1 es básica, entonces tenemos que considerar todos los costos reducidos.

$$\begin{aligned} (\bar{c}_3, \bar{c}_4) &= (c_3, c_4) - (c_1, c_2, c_5) B^{-1} R \\ &= (0,0) - (-c_1, -3, 0) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (0,0) - (-c_1, -3, 0) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \\ &= -(c_1 - 3/2, -2c_1 + 3/2) \geq (0,0) \end{aligned}$$

Entonces

$$3/4 \leq c_1 \leq 3/2$$

- $\underline{c_2}$: x_2 tambien es básica y por lo tanto tenemos que considerar todos los costos reducidos.

$$\begin{aligned}
(\bar{c}_3, \bar{c}_4) &= (c_3, c_4) - (c_1, c_2, c_5)B^{-1}R \\
&= (0,0) - (-1, -c_2, 0)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (0,0) - (-1, -c_2, 0)\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \\
&= -(1 - \frac{c_2}{2}, -2 + \frac{c_2}{2}) \geq (0,0)
\end{aligned}$$

Entonces

$$2 \leq c_2 \leq 4$$

Obs: Análisis para c_3, c_4 y c_5 no tienen sentido para este problema pues las variables asociadas son las de holgura. De todas formas, el procedimiento es análogo (con la diferencia que cuando es variable no básica podrían hacerse menos calculos).

3. Adelantando un poco, este problema cabe dentro de análisis post optimal pues veremos cual es nuevo óptimo para una variación dada del los parametros del problema. Claramente la incorporación de este nuevo producto, como no se esta produciendo ($x_{nuevo} = 0$), no viola la factibilidad del problema. Luego, sólo tenemos que verificar la óptimalidad:

$$\begin{aligned}
(\bar{c}_{nuevo}, \bar{c}_3, \bar{c}_4) &= (-1,0,0)(-1,-3,0)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -(3, 1/2, 1/2) \geq (0,0)
\end{aligned}$$

$\therefore$ La base sigue siendo óptima.

Obs: En mas de alguna parte habrán leído que dualidad es una poderosa herramienta de análisis de sensibilidad y post optimal, pero sin embargo nunca la hemos usado con esos propositos. En efecto, la parte 3. de este problema es equivalente a la verificación de una única condición dada por la restricción dual asociada a la nueva variable x_{nuevo}:

$$5\bar{y}_1 + 3\bar{y}_2 + 3\bar{y}_3 \geq 1$$

$\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ e $\bar{y}_3$ son los valores óptimos del problema original y se determinan a partir de la solución primal.

$\odot$

4.3. Problema 3

Comente acerca de la veracidad o falsedad de las siguientes aseveraciones:

1. Si un problema de programación lineal es infactible su dual es necesariamente no acotado.
2. Si conozco la solución óptima de un PPL, tengo inmediatamente el valor de la función objetivo óptima del problema dual asociado sin necesidad de utilizar el teorema de holgura complementaria.
3. Si conozco los precios sombra de un problema de programación lineal puedo reconstruir directamente la solución (primal) de este problema.
4. El precio sombra de toda restricción inactiva es cero.
5. Hacer análisis de sensibilidad corresponde a utilizar la información dada por la resolución de un PPL para ver como seriá la nueva solución si varía alguno de los parámetros del problema.

Solución

1. Falso ya que el problema dual puede ser infactible.
2. Verdadero porque se tendra que el valor de la función objetivo dual óptima coincidirá con el valor de la función objetivo primal óptima.
3. Verdadero pues el vector de precios sombras es el vector de variables duales óptimas. Luego, puedo aplicar el teorema de holgura complementaria para recuperar la solución primal.
4. Verdadero. Basta aplicar el teorema de holgura complementaria. Otra forma de verlo es a través de un problema de producción (combinación de productos): Al aumentar marginalmente la disponibilidad de un recurso sobre el cual tenemos holguras, no nos aporta ningún aumento de los beneficios.
5. Falso. Eso correspondería a análisis post optimal. Análisis de sensibilidad estudia las condiciones que deben darse sobre los parámetros para que la solución siga siendo óptima.

$\odot$