

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A – Optimización

Profesores: Francisco Cisternas
Richard Weber
Auxiliares: André Carboni
Leonardo López
Gonzalo Romero
Rodrigo Wolf

CONTROL 1

Miércoles 5 de septiembre

Problema 1

1) Describa los pasos principales de la metodología de la Investigación de Operaciones.

1-Definición del problema: hay que identificar el ámbito del sistema en estudio, establece los objetivos del sistema e identificar las alternativas de decisión

2-Construcción del modelo: se usan modelos matemáticos para resolver el problema (existen diferentes tipos de modelos)

3-Resolución del modelo: en ocasiones se usan algoritmos exactos para conseguir esto, otras veces se usan heurísticas.

4-Validación del modelo: Hay que ver si la solución es razonable, para esto podemos usar la información histórica y si no disponemos de ella podemos usar un modelo de simulación (también es posible apoyarse de la intuición).

5-Implementación y control del modelo: hay que establecer procedimientos para la implementación y un sistema de control

2) Discuta la veracidad de las siguientes afirmaciones:

a) Una heurística nunca encuentra la solución óptima de un problema dado.
Falso si bien, es poco probable que la heurística entregue la solución exacta eso puede pasar

b) No hay diferencias entre un método y un algoritmo.
Falso, en el algoritmo esta garantizado la llegada al optimo del problema en un número finito de iteraciones

c) Se puede resolver cada problema de la clase NP-completo en tiempo polinomial.
Falso, pero si se pudiese todos los problemas de la clase NP se resolverían en tiempo polinomial

3) Respecto al método del gradiente:

a) ¿Para qué tipo de problemas puede ser aplicado?
Para problemas de optimización no lineal irrestricta

b) Descríbalo.
el método viene dado por el paso iterativo:

$$x^{k+1} = x^k - \lambda_k \nabla f(x^k)$$

Con λ_k solución óptima del problema:

$$\min_{\lambda} h_k(\lambda) = f(x^k + \lambda d^k)$$

$$\text{s.a. } \lambda \geq 0$$

Si $\nabla f(x^k) = 0$, entonces x^k es un punto estacionario y se debe finalizar.

c) Justifique por qué es un método y no una heurística.

Porque nada nos garantiza que obtengamos la solución en un número finito de iteraciones.

d) Explique en qué ocasiones la convergencia del método puede ser muy lenta.

Si las superficies de nivel son excéntricas (basta que digan si hay excentricidad de la función)

4) Para un problema de programación no-lineal (P).

a) Enuncie las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) e interprételas gráficamente.

$$\begin{aligned}\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) &= 0 \\ \mu_i g_i(\bar{x}) &= 0, \quad i = 1, \dots, m \\ \mu_1 &\geq 0, \dots, \mu_m \geq 0\end{aligned}$$

Esto quiere decir que $-\nabla f(\bar{x})$ es una combinación lineal positiva de los gradientes de las restricciones activas en el punto, o sea $-\nabla f(\bar{x})$ pertenece al cono formado por las restricciones activas en el punto

b) ¿Bajo qué condición adicional son suficientes para que el problema (P) tenga un óptimo global?

Si la función objetivo y las restricciones son convexas. También se puede señalar que la región que se obtiene sea convexa

5)

a) Un amigo suyo en lugar de estar resolviendo un problema con un algoritmo polinomial lo está haciendo con uno exponencial, ¿su amigo está cometiendo un error?

No necesariamente, porque puede ser que para el problema que él está resolviendo se comporte mejor el de complejidad exponencial

b) Comente la siguiente afirmación: si dos algoritmos resuelven un mismo problema en tiempo polinomial entonces la complejidad de ambos es la misma?

No necesariamente, ya que por ejemplo pueden coincidir en ese problema, pero puede ocurrir que uno de ellos siempre resuelva los problemas en tiempo polinomial y el otro puede demorarse a veces un tiempo exponencial.

6) Escriba y explique la función objetivo de la Tarea 1 y nombre al menos 2

Restricciones relevantes. (No es necesario que se acuerden exactamente de los números).

Max $z = \sum_{i=1}^3 (P_i - M_i - L_i) X_i$ Maximizar la utilidad de la fábrica de muebles (precio-mano de obra – materias primas)* unidades producidas

$\sum_{i=1}^3 C_i * x_i \leq 80$ Las horas de carpintería (C_i) por unidad producida (X_i) no deben superar las horas totales de carpintería (80 horas)

$\sum_{i=1}^3 A_i * x_i \leq 100$ Las horas de acabado (A_i) por unidad producida no deben superar las horas totales de acabado (100 horas)

$x_{\text{mesas}} \leq 40$ No se deben producir más de 40 mesas

$x_{\text{veladores}} \leq 25$ No se deben producir más de 25 veladores

$x_{\text{mesas}} \geq 10$ Se deben producir más de 10 mesas

Problema 2

Sea tiene el siguiente problema de optimización no lineal:

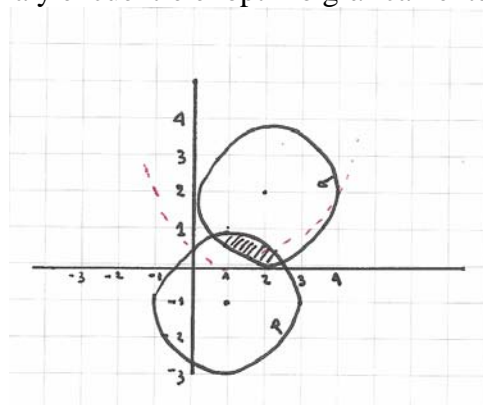
$$\text{Máx } z = -(x_1 - 1)^2 + x_2$$

s.a.

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 4$$

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \leq 4$$

1. Grafique el problema y encuentre el óptimo gráficamente.



El candidato a óptimo es el (1,1)

2. Verifique las condiciones de KKT para el punto encontrado (Si usted cree que el punto que postulo como óptimo no lo es arguéntelo, si lo hace bien tendrá todo el puntaje de la parte 2, no así en la 1 y 3.)

Hay que llevar el problema a la forma estándar:

$$\text{Máx } z = (x_1 - 1)^2 - x_2$$

s.a.

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 - 4 \leq 0$$

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - 4 \leq 0$$

Luego:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g1 = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 2) \\ 2(x_2 - 2) \end{pmatrix}$$

$$\nabla g2 = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 2(x_2 + 1) \end{pmatrix}$$

Luego para el punto (1,1), al evaluar las condiciones de holgura complementaria (que es lo mismo que ver que restricciones son activas) obtenemos que $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 \in \mathbb{R}$

Luego llegamos a que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mu_2 = 1/4$$

Como tanto μ_1 y μ_2 son mayores o iguales a cero se cumple KKT

3. ¿Puede aseverar que el punto encontrado es óptimo global del problema?. Justifique.

Si, argumentos correctos son del estilo que la región factible es convexa y la forma de la función objetivo nos permite concluir.

También se pueden evaluar los hessianos de las tres restricciones en el (1,1) y ver que son convexas.

Suponga que tiene el mismo espacio de soluciones factibles, pero la función objetivo ahora es la siguiente:

$$\text{Máx } w = (x_1 - 1)^2 + x_2$$

4. ¿El punto encontrado en la parte 1, satisface las condiciones de KKT?.

$$\text{Máx } z = -(x_1 - 1)^2 - x_2$$

s.a.

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 - 4 \leq 0$$

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - 4 \leq 0$$

Luego:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -2(x_1 - 1) \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_1 = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 2) \\ 2(x_2 - 2) \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_2 = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 2(x_2 + 1) \end{pmatrix}$$

Luego para el punto (1,1), al evaluar las condiciones de holgura complementaria (que es lo mismo que ver que restricciones son activas) obtenemos que $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 \in \mathbb{R}$

Luego llegamos a que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mu_2 = 1/4$$

Como tanto μ_1 y μ_2 son mayores o iguales a cero se cumple KKT

5. ¿Que se puede concluir entonces del punto encontrado en la parte 1?.

Por la forma de la función o evaluando el hesiano en (1,1) (lo que da $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$)

Podemos concluir que no cumple con las condiciones suficientes de KKT.

En la pizarra se realizara una ayuda de cómo graficar el problema

Problema 3

a) (5.7puntos) No es fácil dirimir cual es el rol de un canal de televisión público como lo es TVN. En el caso de este muchas son las críticas a los contenidos de su programación y al escaso aporte del canal para la cultura del país.

Ante tal situación la presidenta de la republica doña Michelle Bachelet, le ha solicitado al presidente del directorio de TVN, Francisco Vidal, que la programación del canal de todos cumpla con los siguientes requisitos:

- Se autofinancie
- Se transmita al menos tres horas de programación cultural o informativa o educativa a la semana durante el bloque prime (entre 22 y 24 horas)
- Que como máximo hayan 10 horas de programas faranduleros a la semana
- Que al menos el 50% de los programas que se transmiten (ojo: no de las horas transmitidas) sean de factura nacional (hechos en Chile)
- Que al menos un 10% de las horas que se transmiten en un día sean de entretenimiento

- Que se vea en pantalla el máximo de programación cultural, informativa y educativa posible respetando lo antes señalado

Ante tal petición el señor Vidal, de gran verborrea, le contesta a la presidenta que no se preocupe, que el tiene todo bajo control. Sin embargo, la realidad es que el presidente del directorio esta algo complicado ya que no esta seguro que estructura de programación le permite cumplir con todos estos requisitos, es por esto que él ha acudido a usted para que le ayude a solucionar este dilema: el de definir los programas que TVN transmite de lunes a domingo.

Para poder hacer esto el ex ministro le ha proporcionado la siguiente información referente a la forma en que debe operar el canal y los parámetros involucrados

- La programación de lunes a viernes es la misma a toda hora
- La programación del sábado es la misma que la del domingo
- Los programas disponibles para mostrar en pantalla están identificados de la siguiente forma: $1, \dots, n$ son culturales o informativos o educativos, $n+1, \dots, m$ son de entretenimiento y $m+1, \dots, M$ son de farándulas
- Los programas duran 1 hora
- Un programa no es transmitido más de una vez al día
- Un programa que se trasmite durante los días hábiles no es transmitido durante el fin de semana
- TVN transmite las 24 horas del día
- CH_i ($i=1, \dots, n, \dots, m, \dots, M$) vale 1 si es que el programa es hecho en Chile y 0 en caso contrario
- IP_i ($i=1, \dots, n, \dots, m, \dots, M$) son los ingresos del programa i si se transmite en horario prime
- I_i ($i=1, \dots, n, \dots, m, \dots, M$) son los ingresos del programa i si se transmite en otro horario
- C_i ($i=1, \dots, n, \dots, m, \dots, M$) son los costos del programa i (no importa el horario en que se transmita)
- Todo programa de entretenimiento debe ir seguido de una cultural o informativo o educativo
- Por cada tres horas de programas culturales o educativos o informativos que contenga los días hábiles se permite una hora de programas de entretenimiento durante cada uno de los días del fin de semana (por ejemplo si se transmiten 10 horas de culturales en cada día hábil se pueden dar hasta 3 horas de entretenidos tanto el sábado como el domingo).

Ahora el que tengamos una televisión con contenido depende de cómo usted resuelva este PPL (Se recomienda usar variables binarias).

b) (0,3 décimas) Que le respondería al señor Vidal si este le dijese que junto con todas las restricciones señaladas anteriormente debe incluir una que diga que por cada tres horas o más de programas de entretenimiento que haya en un día deben haber exactamente tres horas de programas faranduleros ese mismo día (no se aceptan consultas de esta pregunta)

Q)

$$X_{it} = \begin{cases} 1 & \text{si TRANSMITE PROGRAMA } i \text{ ENTRE } t \text{ y } t+1 \text{ DE LUNES a VIERNES} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$Y_{it} = \begin{cases} 1 & \text{si TRANSMITE PROGRAMA } i \text{ ENTRE } t \text{ y } t+1 \text{ SABADO y DOMINGO} \\ 0 & \sim \end{cases} \quad (0,5)$$

$$036: i = 1, \dots, M \quad t = 0, \dots, 23$$

0- NATURALEZA DE LAS VARIABLES

$$X_{it}, Y_{it} \in \{0, 1\}$$

(0,4)

1- SE AUTOFINANCIE

$$5 \cdot \left(\sum_{i=1}^M \sum_{t=0}^{24} X_{it} (I_i - C_i) + \sum_{i=1}^M \sum_{t=22}^{23} X_{it} (IP_i - C_i) \right) + 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^M \sum_{t=0}^{24} Y_{it} (I_i - C_i) + \sum_{i=1}^M \sum_{t=22}^{23} Y_{it} (IP_i - C_i) \right) \geq 0 \quad (0,4)$$

2- MÍNIMO CULTURAL EN EL BLOQUE PRIME

$$5 \cdot \sum_{i \in \text{CUL}} X_{i22} + X_{i23} + 2 \cdot \sum_{i \in \text{CUL}} Y_{i22} + Y_{i23} \geq 3 \quad (0,4)$$

3- MÁXIMO FARAUDLEROS

$$5 \cdot \sum_{t=1}^{23} \sum_{i \in \text{FAR}} X_{it} + 2 \cdot \sum_{t=1}^{23} \sum_{i \in \text{FAR}} Y_{it} \leq 10 \quad (0,4)$$

4- FACTURA NACIONAL

$$\sum_i \sum_t (X_{it}) CH_i + \sum_i \sum_t Y_{it} CH_i \geq 24 \quad (0,4)$$

5- MÍNIMO DE ENTRETENCIÓN

$$\sum_{i \in \text{ENT}} \sum_t X_{it} \geq 2,4 \quad \sum_{i \in \text{E-T}} \sum_t Y_{it} \geq 2,4 \quad (0,4)$$

6. NO MÁS DE UNA VEZ AL DÍA

$$\sum_t X_{it} \leq 1 \quad \forall i$$

(0,4)

$$\sum_t Y_{it} \leq 1 \quad \forall i$$

7. SI VA DE LUN A VIER NO VA EL FIN DE SEMANA

$$\sum_t X_{it} + \sum_t Y_{it} \leq 1 \quad \forall i$$

(0,4)

$$(\text{o} \quad X_{it} + Y_{it} \leq 1 \quad \forall (i,t))$$

8. TRANSMITE LAS 24 HORAS

$$\sum_{i,t} X_{it} = 24 \quad ; \quad \sum_{i,t} Y_{it} = 24$$

(0,4)

9. ENTRETENIDO SEGÚN DE CULTURAL

$$a) \sum_{i \in ENT} X_{i,t} \leq \sum_{i \in CUL} X_{i,t+1} \quad \forall T \in \{0, \dots, 22\}$$

$$b) \sum_{i \in ENT} X_{i,23} \leq \sum_{i \in CUL} X_{i,0}$$

$$c) \sum_{i \in ENT} X_{i,23} \leq \sum_{i \in CUL} Y_{i,0}$$

$$d) \sum_{i \in ENT} Y_{i,t} \leq \sum_{i \in CUL} Y_{i,t+1} \quad \forall T \in \{0, \dots, 22\}$$

$$e) \sum_{i \in ENT} Y_{i,23} \leq \sum_{i \in CUL} Y_{i,0}$$

$$f) \sum_{i \in ENT} Y_{i,23} \leq \sum_{i \in CUL} X_{i,0}$$

a, b, d, e 0,4

c, f) 0,4

10. 3 HORAS DE CULTURALES PERMITEN 1 HORA DE ENTRETENIDOS

$$\sum_{i \in \text{CUL}} Y_{it} \leq \frac{1}{3} \cdot \sum_{i \in \text{CUL}} X_{it} \quad 0,4$$

$$\text{F.OBJ MAX } \sum_{i \in \text{CUL}} X_{it} + Y_{it}$$

0,4

$$(\Leftrightarrow \text{MAX } 5 \cdot \sum_{i \in \text{CUL}} X_{it} + 2 \cdot \sum_{i \in \text{CUL}} Y_{it})$$

b) HAY QUE CONTESTARLE QUE SU PETICIÓN GENERA UN PROBLEMA INFECTIBLE. YA QUE LA RESTRICCIÓN 5 OBLIGA A QUE TODOS LOS DÍAS HAYAN 3 HORAS DE PROGRAMAS ENTRETENIDOS, PERO LA RESTRICCIÓN 3 IMPOSIBILITA EL HECHO DE QUE HAYAN 21 HORAS DE FARRA DULA A LA SEMANA (0,3)

OBSERVACIONES: • SIEMPRE HAY MÁS DE UNA FORMA DE RESOLVER EL PROBLEMA

• EN LAS SUMATORIAS NO IMPORTA QUE PONGAN: $\sum_{i,t}$
SÓLO SI HAY QUE SUMAR PARA TODOS EL RANGO DE VALORES

• OTRA OPCIÓN DE MODELAJIENTOS ES USANDO:

$$X_{it} = \begin{cases} 1 & \text{si TRANSMITE PROGRAMA } i \text{ ENTRE } t \text{ y } t+1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$t = 0, \dots, 167$ ACA HABRÍA QUE IMPONER POR EJEMPLO QUE

$$X_{i0} = X_{i24} = X_{i48} = X_{i72} = X_{i96} ; X_{i110} = X_{i144} \text{ y así.}$$