



Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A - Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Richard Weber
Auxiliares: Blas Duarte
Sebastián Guzmán
Marianela Pereira

Control N°1 Miércoles 1 de Septiembre de 2004

Pregunta 1

Parte a

- a. **(0,5 pto.)** Suponga que tiene un algoritmo exponencial para resolver en forma exacta un problema de decisión Q. ¿Puede afirmar que el problema Q no pertenece a la clase de problemas P (problemas polinomiales)? Justifique la respuesta.
- b. **(0,5 pto.)** Sea un problema Q perteneciente a la clase de problemas NP. ¿Puede afirmar que no existe un algoritmo polinomial que resuelva en forma exacta el problema Q? Justifique la respuesta.
- c. **(1,0 pto.)** Sea un problema Q perteneciente a la clase de problemas NP-completos. ¿Puede afirmar que no existe un algoritmo polinomial que resuelva en forma exacta el problema Q? Justifique la respuesta.

Parte b

- a. **(1,0 pto.)** Describa una iteración del Método del Gradiente y dé una justificación gráfica y/o conceptual de su funcionamiento.
- b. **(1,0 pto.)** Describa una iteración del Método de Newton y dé una justificación gráfica y/o conceptual de su funcionamiento.
- c. Sea (P) el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & g_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & f, g_i \in C^1 \end{aligned}$$

1. **(1,0 pto.)** ¿Puede existir x^* punto factible de (P) que verifique las condiciones de KKT y no sea mínimo local?
2. **(1,0 pto.)** ¿Puede existir y^* mínimo local de (P) que no verifique las condiciones de KKT?

Pregunta 2

Sea el siguiente problema,

$$\begin{aligned} & \text{Min } (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ & \text{s.a. } x_1 + x_2 \leq 1 \\ (P) \quad & 6 \cdot x_1^3 + x_2^2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Se les pide:

- (1,5 pto.)** Desarrollar las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para el problema (P).
- (1,5 pto.)** Revisar el cumplimiento de las condiciones KKT para los siguientes puntos.
 $A = (0,0)$; $B = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$; $C = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- (1,5 pto.)** Mostrar las restricciones, el conjunto de soluciones factibles y la función objetivo de forma gráfica.
- (1,5 pto.)** Dar la solución óptima y el valor de la función objetivo al punto asociado.

Pregunta 3

Para guardar la confidencialidad del afectado, nos remitiremos sólo a su alias, "hombre Guz". Guz necesita definir su asignación de tiempo de mejor manera para no caer en problemas con los alumnos del IN34A. Para ésto Guz asegura tener una disposición de tiempo para lo que resta del año de T [días].

Guz, siendo un hombre de vida, debe incluir S clases auxiliares de las K que quedan, para eso la auxiliar coordinadora le entregó un calendario con las auxiliares que quedan por hacer. Este calendario le servirá a Guz para decidir si la auxiliar s la hace o no. Cada una de estas actividades tiene una duración mínima de taux_s [horas]. Aparte de eso, Guz debe tener contenta a sus P pololas con las que mantiene una relación seria y debe considerar el tiempo dedicado a sus actividades curriculares. Suponga que el tiempo que le sobra lo utiliza en ver televisión y otras cosas de carácter cotidiano que no influyen en los alumnos.

Sin embargo analizando mejor la situación, por temas de dinero y de tiempo, debe decidir entre sus P mujeres a sólo 2. Asimismo, para sus conquistas seleccionadas concluye lo siguiente: *para conquistarla cada cita debe durar menos que el total de tiempo ya dedicado a las citas anteriores*. Dada esta información, Guz ha decidido que debe planificar el tiempo de duración de cada una de las 3 citas que espera tener con sus enamoradas. Sin embargo debe considerar que cada una de las citas con cada una de sus novias seleccionadas no debe superar h_{\max_j} y no debe ser menor a h_{\min_j} ($j = 1,2,3$).

Además, Guz luchará por evitar que sus N ramos se vayan a las "pailas". Debemos considerar que por cada unidad de tiempo dedicada al curso n obtendrá \mathbf{a}_n unidades adicionales en su nota final. Considere que su meta es lograr una nota promedio \mathbf{a}_{dest} para seguir como alumno destacado, teniendo en cuenta además que no debe reprobado ningún curso (nota de aprobación de cada curso = 4).

Como buen ingeniero que es, ha definido que lograr el amor con sus novias seleccionadas le entregará un beneficio de $bamor_p$ [u.b] por cada unidad dedicada a las citas de sus novias.

Además, la preparación de las auxiliares le otorga un beneficio, no muy alto, de $baux_s$ [u.b] por unidad de tiempo utilizada en la auxiliar k , y obtiene un beneficio de $bpba_n$ [u.b] por el nivel de éxito obtenido en sus pruebas.

Se le pide que ayude a Guz a desarrollar su plan de asignación de tiempos para lo que resta del año de manera que maximice su beneficio.

Control N°1 PAUTA
Miércoles 1 de Septiembre de 2004

Pregunta 1

Parte a

- a. **(0,5 pto.)** Suponga que tiene un algoritmo exponencial para resolver en forma exacta un problema de decisión Q. ¿Puede afirmar que el problema Q no pertenece a la clase de problemas P (problemas polinomiales)? Justifique la respuesta.

R. No. Porque podría existir otro algoritmo para resolver Q que sea polinomial.

- b. **(0,5 pto.)** Sea un problema Q perteneciente a la clase de problemas NP. ¿Puede afirmar que no existe un algoritmo polinomial que resuelva en forma exacta el problema Q? Justifique la respuesta.

R. No. Todos los problemas de P están en NP. Por lo tanto el problema Q podría ser cualquiera de los de P.

- c. **(1,0 pto.)** Sea un problema Q perteneciente a la clase de problemas NP-completos. ¿Puede afirmar que no existe un algoritmo polinomial que resuelva en forma exacta el problema Q? Justifique la respuesta.

R. No. Es un problema abierto saber si existe algún algoritmo polinomial para cualquier problema de NP-completo.

Parte b

- a. **(1,0 pto.)** Describa una iteración del Método del Gradiente y dé una justificación gráfica y/o conceptual de su funcionamiento.

- Las iteraciones del algoritmo se pueden resumir en

$$x^{k+1} = x^k - I_k \nabla f(x_k), \text{ donde } I_k = \frac{1}{\min_i f(x^k - I_i \nabla f(x^k))}.$$

Explicar que nos vamos moviendo en la dirección del gradiente de la función, que es la de máximo descenso. Pueden hacer el dibujo que el punto se va moviendo perpendicular a las curvas de nivel de la función.

- b. **(1,0 pto.)** Describa una iteración del Método de Newton y dé una justificación gráfica y/o conceptual de su funcionamiento.

- Las iteraciones del algoritmo se pueden resumir en

$$x^{k+1} = x^k - [H_{f(x^k)}]^{-1} \nabla f(x_k)$$

Explicar que nos movemos en la dirección de $-[H_{f(x^k)}]^{-1} \cdot \nabla f(x^k)$ -, que es de descenso cuando el hessiano es definido positivo (y eso pasa si la f es convexa).

También vale si explican que se aproxima la función por Taylor de orden 2 y en cada paso minimizan la aproximación (hicimos el dibujo en clase).

c. Sea (P) el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & g_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & f, g_i \in C^1 \end{aligned}$$

1. **(1,0 pto.)** ¿Puede existir x^* punto factible de (P) que verifique las condiciones de KKT y no sea mínimo local?

R. Si, por ejemplo si la f o las g no son convexas (condiciones pedidas en la condición suficiente de optimalidad).

2. **(1,0 pto.)** ¿Puede existir y^* mínimo local de (P) que no verifique las condiciones de KKT?

R. Si, si el punto no es regular (condición pedida en la condición necesaria de optimalidad, se vio en clase donde esto pasaba).

Control N°1 PAUTA
Miércoles 1 de Septiembre de 2004

Pregunta 2

Sea el siguiente problema,

$$\begin{aligned} & \text{Min } (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ & \text{s.a. } x_1 + x_2 \leq 1 \\ (P) \quad & 6 \cdot x_1^3 + x_2^2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Se les pide:

- a. **(1,5 pto.)** Desarrollar las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para el problema (P).
- R. **Antes de trabajar debemos pasar el problema a una forma estandar para poder trabajar las condiciones de KKT.**

$$\begin{aligned} & \text{Min } f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ & \text{s.a. } g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0 \quad (1) \\ (P) \quad & g_2(x_1, x_2) = 6 \cdot x_1^3 + x_2^2 - 1 \leq 0 \quad (2) \\ & g_3(x_1, x_2) = -x_1 \leq 0 \quad (3) \\ & g_4(x_1, x_2) = -x_2 \leq 0 \quad (4) \end{aligned}$$

Ahora podemos identificar las condiciones de KKT. Se presentan a continuación.

$$\begin{aligned} & \exists m \geq 0, tq \\ & \nabla f(x) + \sum_i m_i \nabla g_i(x) = 0 \\ & m_i g_i(x) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto debemos identificar los gradientes de cada uno de las ecuaciones presentes en el problema.

$$\begin{aligned} \nabla f(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} 2(x_1 - 2) \\ 2(x_2 - 2) \end{pmatrix} & \nabla g_1(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \nabla g_2(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} 18x_1^2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \\ \nabla g_3(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \nabla g_4(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto el sistema queda así.

$$\begin{pmatrix} 2(x_1 - 2) \\ 2(x_2 - 2) \end{pmatrix} + m_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} 18x_1^2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} + m_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + m_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- b. **(1,5 pto.)** Revisar el cumplimiento de las condiciones KKT para los siguientes puntos.
 $A = (0,0)$; $B = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$; $C = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

- **A(0,0)**

En este punto debemos analizar las restricciones que son activas. De acuerdo a lo anterior debemos identificar que las restricciones activas son (3) y (4), y obviamente (1) y (2) no son activas.

Por lo tanto $m_1 = m_2 = 0$ y $m_3, m_4 \in \Re$. Por lo tanto el sistema queda,

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} + m_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + m_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene como solución.

$$m_3 = -4$$

$$m_4 = -4$$

Por lo tanto no cumple KKT.

- **B = ($\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$)**

En este punto debemos analizar las restricciones que son activas. De acuerdo a lo anterior debemos identificar que las restricciones activas son "Ninguna" y obviamente (1), (2), (3) y (4) no son activas. Esto quiere indicar que el punto es un punto interior, por lo tanto $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 0$. Por lo tanto el sistema queda,

$$\begin{pmatrix} -3,5 \\ -3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema no tiene solución.

Por lo tanto no cumple KKT.

- **C = ($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$)**

En este punto debemos analizar las restricciones que son activas. De acuerdo a lo anterior debemos identificar que las restricciones activas son (1) y (2), y obviamente (3) y (4) no son activas.

Por lo tanto $m_1, m_2 \in \mathcal{R}$ y $m_3 = m_4 = 0$. Por lo tanto el sistema queda,

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} + m_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} 9/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene como solución.

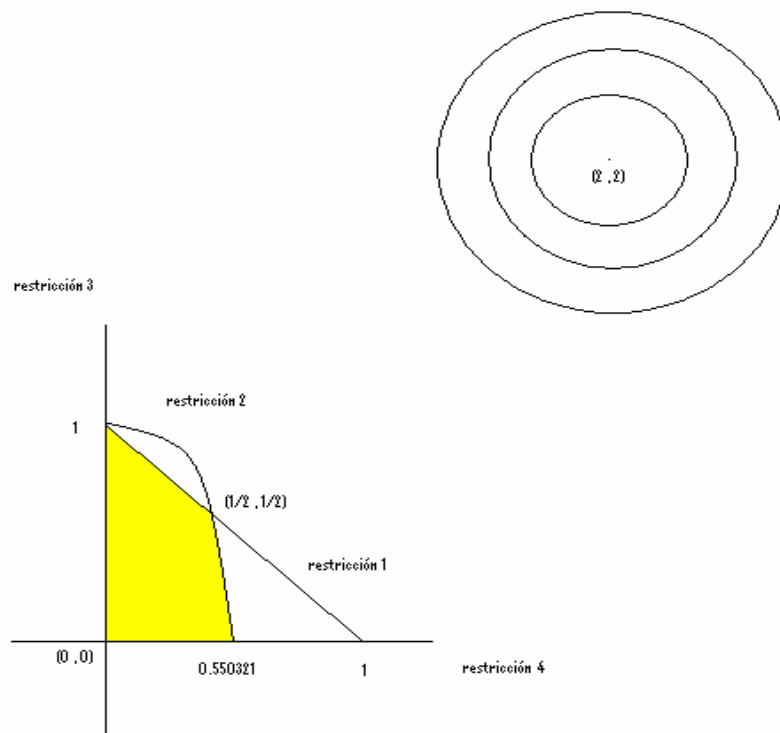
$$m_1 = 3$$

$$m_2 = 0$$

Por lo tanto cumple KKT.

- c. (1,5 pto.) Mostrar las restricciones, el conjunto de soluciones factibles y la función objetivo de forma gráfica.

R. Deben lograr identificar la forma de las restricciones, el espacio de soluciones y la función objetivos.



$$x_1 + x_2 \leq 1 \quad \text{restriccion}_1$$

$$6 \cdot x_1^3 + x_2^2 \leq 1 \quad \text{restriccion}_2$$

$$x_1 \geq 0 \quad \text{restriccion}_3$$

$$x_2 \geq 0 \quad \text{restriccion}_4$$

d. **(1,5 pto.)** Dar la solución óptima y el valor de la función objetivo al punto asociado.

R. Analizando gráficamente podemos ver que el valor óptimo es $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
Por lo tanto el valor de la función objetivo es $z = 24,5$ u.m.

Deben analizar la convexidad de la función, para lo cual podemos ver que:

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

→ Es convexa.

$$6 \cdot x_1^3 + x_2^2 \leq 1$$

→ Es un espacio convexo (dentro del espacio de soluciones seleccionado).

$$x_1 \geq 0$$

→ Son convexas.

$$x_2 \geq 0$$

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$$

→ Función Objetivo es un espacio convexo.

Tenemos condiciones de convexidad en las ecuaciones presentes, por lo tanto el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es óptimo global.



Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A - Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Richard Weber
Auxiliares: Blas Duarte
Sebastián Guzmán
Marianela Pereira

Pauta Control N°1 **Miércoles 1 de Septiembre de 2004**

Pregunta 3

Para guardar la confidencialidad del afectado, nos remitiremos sólo a su alias, "hombre Guz". Guz necesita definir su asignación de tiempo de mejor manera para no caer en problemas con los alumnos del IN34A. Para ésto Guz asegura tener una disposición de tiempo para lo que resta del año de T [días].

Guz, siendo un hombre de vida, debe incluir S clases auxiliares de las K que quedan, para eso la auxiliar coordinadora le entregó un calendario con las auxiliares que quedan por hacer. Este calendario le servirá a Guz para decidir si la auxiliar s la hace o no. Cada una de estas actividades tiene una duración mínima de taux_s [horas]. Aparte de eso, Guz debe tener contenta a sus P pololas con las que mantiene una relación seria y debe considerar el tiempo dedicado a sus actividades curriculares. Suponga que el tiempo que le sobra lo utiliza en ver televisión y otras cosas de carácter cotidiano que no influyen en los alumnos.

Sin embargo analizando mejor la situación, por temas de dinero y de tiempo, debe decidir entre sus P mujeres a sólo 2. Asimismo, para sus conquistas seleccionadas concluye lo siguiente: *para conquistarla cada cita debe durar menos que el total de tiempo ya dedicado a las citas anteriores*. Dada esta información, Guz ha decidido que debe planificar el tiempo de duración de cada una de las 3 citas que espera tener con sus enamoradas. Sin embargo debe considerar que cada una de las citas con cada una de sus novias seleccionadas no debe superar hmax_j y no debe ser menor a hmin_j ($j = 1, 2, 3$).

Además, Guz luchará por evitar que sus N ramos se vayan a las "pailas". Debemos considerar que por cada unidad de tiempo dedicada al curso n obtendrá α_n unidades adicionales en su nota final. Considere que su meta es lograr una nota promedio α_{dest} para seguir como alumno destacado, teniendo en cuenta además que no debe reprobado ningún curso (nota de aprobación de cada curso = 4). Como buen ingeniero que es, ha definido que lograr el amor con sus novias seleccionadas le entregará un beneficio de bamor_p [u.b] por cada unidad dedicada a las citas de sus novias.

Además, la preparación de las auxiliares le otorga un beneficio, no muy alto, de baux_s [u.b] por unidad de tiempo utilizada en la auxiliar k, y obtiene un beneficio de bpba_n [u.b] por el nivel de éxito obtenido en sus pruebas.

Se le pide que ayude a Guz a desarrollar su plan de asignación de tiempos para lo que resta del año de manera que maximice su beneficio.

Pauta.

Variables de Decisión

$tpoaux_k$: Tiempo destinado a la auxiliar k
 $tpocita_{jp}$: Tiempo destinado a la cita j de la polola p
 $tpocurso_n$: Tiempo dedicado al curso n

$$pol_p = \begin{cases} 1 & , \text{ Si selecciona a la polola p} \\ 0 & , \text{ Si no} \end{cases}$$

$$aux_k = \begin{cases} 1 & , \text{ Si decide hacer la auxiliar k} \\ 0 & , \text{ Si no} \end{cases}$$

Restricciones

i. **Elegir a dos pololas.**

$$\sum_{p=1}^P pol_p = 2$$

ii. **Si elige a la polola, contabilizo el tiempo.**

$$tpocita_{jp} \leq pol_p \cdot M_1 \quad ; \forall j, p$$
$$; M_1 = 24 \cdot T$$

iii. **Elegir S clases auxiliares de las posibles.**

$$\sum_{k=1}^K aux_k = S$$

iv. **Si elijo la clase considero su tiempo.**

$$tpoaux_k \leq aux_k \cdot M_2 \quad ; \forall k$$
$$; M_2 = 24 \cdot T$$

v. **Duración mínima de las clases.**

$$aux_k \cdot taux \leq tpoaux_k \quad ; \forall k$$

vi. **Restricción del tiempo de las citas.**

$$tpocita_{2p} \leq tpocita_{1p}$$
$$tpocita_{3p} \leq tpocita_{1p} + tpocita_{2p} \quad ; \forall p$$

vii. Restricción de cada cita.

$$\begin{aligned} h \min_j &\leq tpocita_{jp} \\ tpocita_{jp} &\leq h \max_j \end{aligned} \quad ; \forall j, p$$

viii. Restricción de las notas.

$$1.0 + \alpha_n \cdot tpocurso_n \geq 4.0 \quad ; \forall n$$

ix. Restricción de alumno destacado.

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N (1.0 + \alpha_{dest} \cdot tpocurso_n) \geq \alpha_{dest} \quad ; \forall n$$

x. Disposición de tiempo total.

$$\sum_{k=1}^K tpoaux_k + \sum_{j=1}^3 \sum_{p=1}^P tpocita_{jp} + \sum_{n=1}^N tpocurso_n \leq T \cdot 24$$

xi. Naturaleza de las Variables.

$$tpoaux_k \geq 0$$

$$tpocita_{jp} \geq 0$$

$$tpocurso_n \geq 0$$

$$pol_p \in \{0,1\}$$

$$aux_k \in \{0,1\}$$

Función Objetivo

$$\mathbf{Max} \sum_{k=1}^K baux_k \cdot tpoaux_k + \sum_{j=1}^3 \sum_{p=1}^P bamor_p \cdot tpocita_{jp} + \sum_{n=1}^N bpba_n ((1.0 + \alpha_n \cdot tpocurso_n) - 4.0)$$