



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A: Optimización
Profs: P. Conca, G. Duran, D. Sauré
Aux : B. Duarte, F. Cisternas, S. Souyris
J. Muñoz, M. Quinteros, G. Medina

Control 1

29 de Agosto, 2003

Problema 3

Responda las siguientes preguntas:

1. Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & f(b) = \sum_{i=1}^N x_i \\ \text{s.a. :} \quad & \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{a_i} \leq b \end{aligned}$$

Además considere que $a_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$.

- Entregue una interpretación geométrica para el problema.
 - Establezca las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker del problema.
 - Encuentre un punto que satisfaga las condiciones de KKT. Es este punto un óptimo local o global?
 - Encuentre una expresión para $f(b)$.
2. Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & f(x) \\ \text{s.a. :} \quad & x_1^2 + x_2^2 \leq 16 \\ & (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \geq 9 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + 2x_2 \geq 9 \end{aligned}$$

- Determine gráficamente el conjunto de soluciones factibles.
- Establezca las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para un punto genérico.
- Encuentre todos los puntos que cumplen con las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para las siguientes funciones objetivo:

- $x_1 + x_2$
- x_1
- x_2
- $-x_1^2 - x_2^2$

Para cada uno de estos puntos entregue el valor de los multiplicadores asociados. Además clasifíquelos de acuerdo a su regularidad.

- Es posible que para alguna función objetivo sea imposible reconocer un óptimo local utilizando el criterio de Karush-Kuhn-Tucker? Si su respuesta es afirmativa, entregue un ejemplo.



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A: Optimización
Profs: P. Conca, G. Duran, D. Sauré
Aux : B. Duarte, F. Cisternas, S. Souyris
J. Muñoz, M. Quinteros, G. Medina

Pauta Control 1

Miércoles 3 de Septiembre, 2003

Problema 1

Variables de decisión (0,5 ptos.)

X_{ij} = Cantidad de mineral transportado desde el yacimiento i a la planta j .
 Z = Capacidad del camión.

Restricciones

- (1,0 ptos.) Disponibilidad en los yacimientos.

$$\sum_{j=1}^N X_{ij} \leq A_i \quad \forall i \in \{1, \dots, M\}$$

- (1,0 ptos.) Requerimiento de las plantas.

$$\sum_{i=1}^M X_{ij} = B_j \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}$$

- (1,0 ptos.) Funcionamiento de las plantas.

$$X_{ij} \geq \alpha_j \sum_{i=1}^M X_{ij} \quad \forall i \in \{1, \dots, M\} \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}$$

- (1,0 ptos.) Capacidad del vehículo.

$$X_{ij} \leq Z$$

- (0,5 ptos.) Naturaleza de las variables.

$$X_{i,j} \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, M\} \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}$$

$$Z \geq 0$$

Función Objetivo (0,5 ptos.)

$$\text{mín } Z$$

Problema 2

- (1,0 ptos.) Las etapas son (la descripción va por su cuenta):
 - Definición del problema.
 - Construcción del modelo.
 - resolución del modelo.
 - Validación del modelo.
 - Implementación y control del modelo.
- (1,0 ptos.) Si, todos los que pertenecen a \mathcal{P} , la clase de problemas para los que si existen algoritmos polinomiales, el cual es un subconjunto de \mathcal{NP}
- (1,0 ptos.) Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que f es una función convexa \Leftrightarrow dados 2 puntos cualesquiera $x', x'' \in X$ y $\forall \lambda \in (0, 1)$ se cumple la siguiente que

$$f(\lambda x' + (1 - \lambda)x'') \leq \lambda f(x') + (1 - \lambda)f(x'')$$

Si la desigualdad es estricta para $x' \neq x''$ entonces f es estrictamente convexa.

Para funciones con derivada continua la definición de función convexa (cóncava) implica que toda tangente al grafo de la función queda enteramente por bajo (sobre) de la misma. Esto significa que $\forall \bar{x} \in X$ y $\forall x \in X$ una función convexa cumple con:

$$f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) \leq f(x)$$

- (1,0 ptos.) Si las funciones f_i son convexas tendremos que

$$f_1(\lambda x' + (1 - \lambda)x'') \leq \lambda f_1(x') + (1 - \lambda)f_1(x'')$$

$$f_2(\lambda x' + (1 - \lambda)x'') \leq \lambda f_2(x') + (1 - \lambda)f_2(x'')$$

$$\vdots$$

$$f_n(\lambda x' + (1 - \lambda)x'') \leq \lambda f_n(x') + (1 - \lambda)f_n(x'')$$

Multiplicando la ecuación i -ésima por $\alpha_i > 0$ y combinando las desigualdades tendremos que

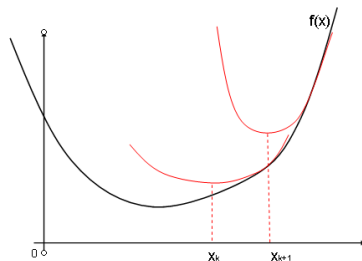
$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(\lambda x' + (1 - \lambda)x'') \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda f_i(x') + \alpha_i (1 - \lambda) f_i(x'')$$

$$f(\lambda x' + (1 - \lambda)x'') \leq \lambda f(x') + (1 - \lambda)f(x'')$$

es decir la función es convexa.

Si alguno de los α_i es negativo no podemos utilizar el mismo argumento puesto que no podremos multiplicar la desigualdad i -ésima por α_i y conservar el sentido de la desigualdad. Por lo tanto no sabemos si se convexa o no (no implica que no sea convexa).

- (1,0 ptos.) Un ejemplo es $f(x, y) = x^3$. $(x, y) = (0, 0)$ no es un mínimo local, sin embargo su gradiente es nulo y la matriz hessiana es nula también (si la matriz es nula es semidefinida positiva y semidefinida negativa a la vez).



6. (1,0 ptos.) El método de Newton se basa en utilizar una aproximación de segundo orden de la función f y minimizar de manera exacta dicha función en cada iteración.

La aproximación utilizada es

$$g(x) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T (x - x^k) + \frac{1}{2} (x - x^k)^T \nabla^2 f(x^k) (x - x^k)$$

La condición de primero orden en la optimización es

$$\begin{aligned} \nabla g(x) &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= \nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k)(x - x^k) \\ \Rightarrow -\nabla f(x^k) &= \nabla^2 f(x^k)(x - x^k) \\ \Rightarrow x^{k+1} &= x^k - \nabla^2 f(x^k)^{-1} \nabla f(x^k) \end{aligned}$$

Lo ideal es que la explicación fuese acompañada con un dibujo explicativo como el siguiente:

Problema 3

1. .

- a) (0,5 ptos.) El espacio de soluciones son los puntos contenidos en un elipsoide. El problema consiste en encontrar un hiperplano tangente con vector normal $\bar{1}$.
- b) (0,5 ptos.) Las condiciones de KKT son las siguientes:

$$-1 + 2 \cdot \mu \frac{x_i}{a_i} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

$$\mu \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{a_i} - b \right) = 0$$

$$\mu \geq 0$$

- c) (1,5 ptos.) De inmediato vemos que:

$$x_i = \frac{a_i}{2\mu} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

Vemos que μ es distinto de 0 (directo de las ecuaciones anteriores). Multiplicamos la i -ésima ecuación por a_i y sumamos las n primeras ecuaciones.

$$\sum_{i=1}^n a_i = 2\mu f(b)$$

Si multiplicamos las ecuaciones por x_i y sumamos tenemos que:

$$\sum_{i=1}^N x_i = f(b) = 2\mu \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{a_i} = 2\mu b$$

Entonces

$$\mu = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N a_i}{b}}$$

por lo tanto

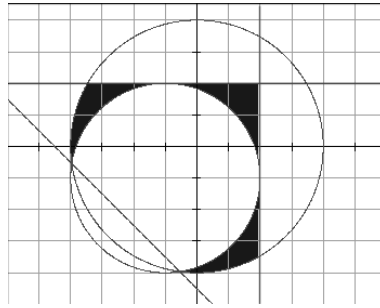
$$x_i = a_i \sqrt{\frac{b}{\sum_{i=1}^N a_i}}$$

finalmente

$$f(b) = \sqrt{b \sum_{i=1}^N a_i}$$

2. .

a) (0,5 ptos.) El espacio de soluciones se muestra en el siguiente gráfico 1.



b) (0,5 ptos.) Las condiciones de KKT son las siguientes:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + 2 \cdot \mu_1 \cdot x_1 - 2 \cdot \mu_2 \cdot (x_1 + 1) + \mu_3 - 2 \cdot \mu_5 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + 2 \cdot \mu_1 \cdot x_2 - 2 \cdot \mu_2 \cdot (x_2 + 1) + \mu_4 - 2 \cdot \mu_5 = 0$$

$$\mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 16) = 0$$

$$\mu_2(-(x_1 + 1)^2 - (x_2 + 1)^2 + 9) = 0$$

$$\mu_3(x_1 - 2) = 0$$

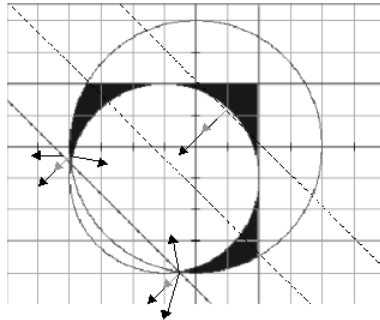
$$\mu_4(x_2 - 2) = 0$$

$$\mu_5(-2x_1 - 2x_2 - 9) = 0$$

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5 \geq 0$$

- c) (2,0 ptos.) Analizamos gráficamente cada caso y vemos los puntos que cumplirán las condiciones KKT, para luego verificar el cumplimiento de las condiciones: Para ver ésto, se debe graficar el gradiente de la función objetivo y ver si está contenido dentro del cono que conforma el negativo de los gradientes de las restricciones (también se puede ver si el negativo del gradiente está contenido por el cono formado por los gradientes de las restricciones)

- $x_1 + x_2$ (0.5 ptos.)



Interceptando las curvas obtenemos los siguientes punto: $(-0,536, -3,964)$, $(-3,964, -0,536)$. Analizando el tercer punto vemos que en él $x_1 = x_2$ y que además pertenece a la restricción 2, a partir de ésto se obtiene que el punto es $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = (2,828, 2,828)$. Veamos los valores de los μ 's para cada punto:

- $(-0,536, -3,964)$

Del gráfico vemos que solo las restricciones 1, 2 y 5 son activas, por lo que $\mu_3 = 0$ y $\mu_4 = 0$. Más aun el gradiente de la función objetivo se puede escribir como el negativo del gradiente de la restricción 5, por lo que $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 = 0$. Con esto obtenemos la siguiente ecuación:

$$1 - 2\mu_5 = 0$$

$$\Rightarrow \mu_5 = 0,5$$

Con ésto el punto cumple las condiciones de KKT.

Cabe señalar que también se puede suponer $\mu_5 = 0$, $\mu_3 > 0$, $\mu_4 > 0$ calculando el valor de estos 2 últimos, ya que μ_5 se puede escribir como combinación lineal de μ_3 y μ_4 .

- $(-3,964, -0,536)$

Este punto es análogo al anterior, por lo que el mismo raciocinio es válido y los μ_i tienen los mismos valores. Así el punto cumple las condiciones de KKT.

- $(2,828, 2,828)$

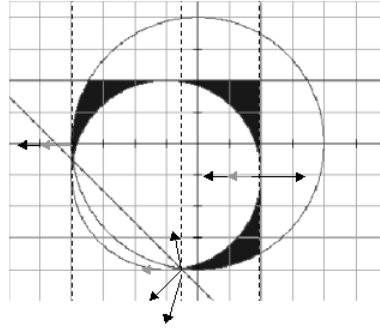
En este punto solo la restricción 2 es activa, por lo que $\mu_1 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 0$. Luego la ecuación a resolver es:

$$1 - 2\mu_2(2,828 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \mu_2 = 0,13$$

Con ésto el punto cumple las condiciones de KKT.

- x_1 (0.5 ptos.)



Analizando el gráfico vemos que uno de los puntos ya fue calculado en la parte anterior, el cual corresponde al punto $(-0,536, -3,964)$. Los otros puntos se pueden ver directamente desde el gráfico, y son: $(-4, 0)$ y $(2, -1)$.

Veamos los valores de los μ 's para cada punto:

- $(-0,536, -3,964)$

Del gráfico vemos que solo las restricciones 1, 2 y 5 son activas, por lo que $\mu_3 = 0$ y $\mu_4 = 0$. Además vemos que basta con el gradiente de 2 restricciones para construir el gradiente de la función objetivo, siempre y cuando μ_2 sea no negativo. Luego arbitrariamente se puede hacer a μ_1 o μ_5 igual a cero. Tomemos $\mu_1 = 0$ (pueden haber tomado $\mu_5 = 0$), así nos queda el sistema de ecuaciones siguiente:

$$1 - 2\mu_1(-0,536 + 1) - 2\mu_5 = 0$$

$$-2\mu_1(-3,964 + 1) - 2\mu_5 = 0$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$\mu_1 = 0,146$$

$$\mu_5 = 0,432$$

Con ésto el punto cumple las condiciones de KKT.

- $(-4, 0)$

Del gráfico vemos que solo la restricción 1 es activa, por lo que $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 0$. Así la ecuación a resolver es:

$$1 - 8\mu_1 = 0$$

$$\Rightarrow \mu_1 = 0,125$$

Con ésto el punto cumple las condiciones de KKT.

- $(2, -1)$

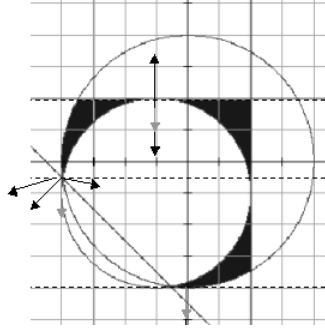
Del gráfico vemos que las restricciones 1 y 2 son activas. Luego $\mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 0$. Sin embargo, vemos que el gradiente se puede construir ponderando el negativo del gradiente de la restricción 2, por lo que $\mu_1 = 0$ (se puede resolver también dejando μ_1 en función de μ_2). Así la ecuación a resolver es:

$$1 - 2\mu_2(2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \mu_2 = 0,167$$

Con ésto el punto cumple las condiciones de KKT.

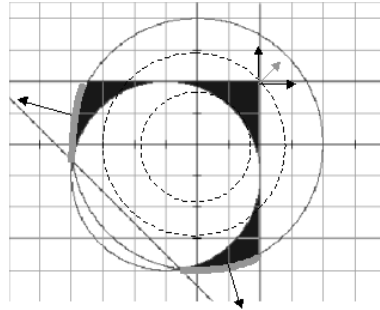
- x_2 (0.5 ptos.)



Analizando el gráfico vemos que uno de los puntos ya fue calculado en la primera parte, el cual corresponde al punto $(-3,964, -0,536)$. Los otros puntos se pueden ver directamente desde el gráfico, y son: $(0, -4)$ y $(-1, 2)$.

Se puede ver que este caso es analago al analizado anteriormente, por lo que le valor de los μ 's son los mismos del caso anterior, concluyendose que todos los puntos anteriormente sealados cumplen con KKT.

- $-x_1^2 - x_2^2$ (0.5 ptos.)



En este caso hay 2 segmentos y un punto que son candidatos a cumplir KKT, en base a los puntos calculados anteriormente y a simples ecuaciones se determinan que los segmentos son: El segmento de la circunferencia $x_1^2 + x_2^2 = 16$ que está comprendido entre el punto $(-3,964, -0,536)$ hasta el punto $(-3\sqrt{2}, 2) = (-4,243, 2)$ y el segmento de la misma circunferencia que e'sta entre el punto $(2, -3\sqrt{2}) = (2, -4,243)$ hasta el punto $(-0,536, -3,964)$. El último punto que cumple KKT se puede ver facilmente desde el gráfico corresponde al punto $(2, 2)$.

Veamos los valores de los μ 's para cada punto:

- Segmento entre $(-3,964, -0,536)$ y $(-4,243, 2)$
del gráfico podemos ver que solo la restricción 1 es activa, por lo que $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 0$. Luego la ecuación a resolver es:

$$2x_1 + \mu_1 \cdot 2x_1 = 0$$

$$\Rightarrow \mu_1 = 1$$

Con ésto el punto cumple las condiciones de KKT.

- Segmento entre $(2, -4,243)$ y $(-0,536, -3,964)$
Este caso es analago al anterior y los μ 's valen lo mismo. Con ésto el punto cumple

las condiciones de KKT.

- (2, 2)

Del gráfico se puede desprender que las restricciones 3 y 4 son activas, por lo que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_5 = 0$. Así, la ecuación a resolver es:

$$-4 + \mu_3 = 0$$

$$\Rightarrow \mu_3 = 4$$

$$-4 + \mu_4 = 0$$

$$\Rightarrow \mu_4 = 4$$

Con ésto el punto cumple las condiciones de KKT.

Nota de Corrección: Dado que los alumnos no usaban calculadora es posible que algunos terminos queden expresados, sin embargo si demuestran que los μ 's son mayores que cero cumplen el objetivo, es decir, es más importante mostrar que los μ 's son positivos que encontrar su valor exacto. Así mismo, es posible que no encuentren el valor exacto de los puntos que cumplen KKT, pero si se distingue que identifican el punto correcto consederen el punto como encontrado.

- (0.5 ptos.) No es posible, ya que la única posibilidad es que el óptimo esté en un punto singular y que el gradiente de la función objetivo no se pueda escribir como la suma de los gradientes negativos de las restricciones activas en estos puntos. Para la región factible del problema los puntos singulares corresponden a los puntos $(-1, 2)$ y $(2, -1)$. Tomemos el punto $(-1, 2)$, así la función debe ser tal que su gradiente tenga una componente en el eje de x_2 , ya que los gradientes de las restricciones activas tienen componente solo por x_1 , pero si lo anterior se cumple el óptimo no será el punto $(-1, 2)$, sino que será $(-4, 243, 2)$ o $(2, 2)$ dependiendo si la componente está en sentido positivo o negativo según x_2 . Para el punto $(2, -1)$ el análisis es análogo.