



Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Civil Industrial.
IN34A Optimización

IN34A Optimización
Profesor: Guillermo Durán.
Richard Weber.
Sebastián Souyris
Auxiliares: Jaime Gacitúa.
Ximena Schultz.
Rodrigo Wolf.
Leonardo López.

Control 1 IN34A 30 de Agosto de 2006

Problema 1

1. Comente y justifique la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
 - a) La complejidad de un problema es posible determinarla matemáticamente encontrando el orden de un algoritmo que resuelve el peor caso.
 - b) Con una heurística adecuada es posible encontrar la mejor solución de un problema de optimización.
 - c) Si se encuentra un algoritmo polinomial para un problema NP-completo, es posible resolver polinomialmente todos los problemas de la clase NP.
 - d) En un problema de programación lineal la condición de KKT siempre es suficiente.
 - e) En un problema de programación lineal, modificar el valor de un coeficiente del lado derecho significa que existan más o menos soluciones factibles.
 - f) Un problema de programación lineal tiene infinitas soluciones cuando es no acotado.
 - g) En un problema lineal mixto con variables binarias no se puede multiplicar una variable $\{0,1\}$ con una variable continua porque esa expresión es no lineal.

2. Responda las siguientes preguntas:

- a) ¿Por qué la solución de los siguientes problemas es la misma?

$$\begin{array}{ll} \text{(P1)} & \text{máx } f(x) \\ \text{s.a.} & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(P2)} & \text{mín } -f(x) \\ \text{s.a.} & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

- b) Para problemas de optimización no lineal irrestricta ¿En que casos recomendaría utilizar el método del gradiente y en cuales el método de Newton? ¿Por que? ¿Que precauciones tomará al momento de iniciar cada algoritmo?

- c) Sea el Problema (P)

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \text{mín } f(x) \\ \text{s.a.} & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad \} = S \end{array}$$

- Demuestre la primera condición de optimalidad:

Sea \bar{x} un mínimo local del problema (P). Entonces

$$\nabla f \bullet d \geq 0, \forall d \in D(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n / d \text{ es dirección factible en } S \text{ con respecto a } \bar{x}\}^1$$

- Geométricamente, ¿Qué interpretación le puede dar?

¹ Sea $x \in S$. Un vector $d \in \mathbb{R}^n$ es una dirección factible en S con respecto a x si existe $\varepsilon > 0$ tal que $x + \lambda d \in S, \forall \lambda \in \{0, \varepsilon\}$.

- d) Considere el problema (P) del punto 2.(c) ¿Por qué la condición de KKT es suficiente solo si la función f y el conjunto S son convexos?

Problema 2

Dado el siguiente problema (P):

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & f(x_1, x_2) = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 4)^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_2 \geq x_1^2 \\ & x_2 \leq 8 - x_1^2 \\ & 4x_1 - x_2 \leq 4 \end{aligned}$$

- (a) Revise el cumplimiento de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para los siguientes puntos: (0,0); (2,4); (6,4).
- (b) ¿Qué podemos concluir para cada uno de estos puntos? Justifique.
- (c) Muestre las restricciones, el conjunto de soluciones factibles y la función objetivo gráficamente.
- (d) Determine un candidato para solución óptima analizando el gráfico. Verifique si este candidato cumple las condiciones de KKT.
- (e) De la solución óptima y el valor de la función objetivo asociado.

Problema 3

El Sudoku es un juego, en donde aparece un cuadrado grande de 9 filas por 9 columnas, o sea, de 81 casilleros, que están divididos a su vez, en nueve subcuadrados de 3 x 3.

Cada subcuadrado hay que llenarlo con los nueve dígitos que van del 1 hasta el 9. Además, no puede aparecer ningún dígito repetido ni en la misma fila ni la misma columna del cuadrado grande.

Como dato adicional se sabe que ya vienen fijados t números n_i en las posiciones (k_i, l_i) del cuadrado ($i=1, \dots, t$). Lo que hay que hacer es completar las casillas que están vacías.

Diseñe un modelo de programación lineal entera que permita encontrar una solución de un Sudoku dado, que minimice la suma de los números de la diagonal principal.

1. Comente y justifique la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- a) La complejidad de un problema es posible determinarla matemáticamente encontrando el orden de un algoritmo que resuelve el peor caso.
- b) Con una heurística adecuada es posible encontrar la mejor solución de un problema de optimización.
- c) Si se encuentra un algoritmo polinomial para un problema NP-completo, es posible resolver polinomialmente todos los problemas de la clase NP.
- d) En un problema de programación lineal la condición de KKT siempre es suficiente.
- e) En un problema de programación lineal, modificar el valor de un coeficiente del lado derecho significa que existan más o menos soluciones factibles.
- f) Un problema de programación lineal tiene infinitas soluciones cuando es no acotado.
- g) En un problema lineal mixto con variables binarias no se puede multiplicar una variable $\{0, 1\}$ con una variable continua porque esa expresión es no lineal.

2. Responda las siguientes preguntas:

- a) ¿Porqué la solución de los siguientes problemas es la misma?

$$\begin{array}{ll} \text{(P1)} & \text{máx } f(x) \\ \text{s.a.} & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(P2)} & \text{mín } -f(x) \\ \text{s.a.} & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

- b) Para problemas de optimización no lineal irrestricta ¿en que casos recomendaría utilizar el método del gradiente y en cuales el método de Newton, porqué?, ¿que precauciones tomaría al momento de iniciar cada algoritmo?
- c) Sea el problema (P)

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \text{mín } f(x) \\ \text{s.a.} & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad \} = S \end{array}$$

Demuestre la primera condición de optimalidad: Sea \bar{x} un mínimo local del problema (P). Entonces $\nabla f(\bar{x}) \cdot d \geq 0, \forall d \in D(\bar{x}) = \{d \in R^n / d \text{ es dirección factible en } S \text{ con respecto a } \bar{x}\}$.¹ ¿Geométricamente que interpretación le puede dar?

- d) Considere el problema (P) del pto. 2c ¿Porqué la condición de KKT es suficiente solo si la función f y el cjo. S son convexos?

¹Sea $x \in S$, un vector $d \in R^n$ es una **dirección factible** en S con respecto a x si existe $\varepsilon > 0$ tal que $x + \lambda d \in S, \forall \lambda \in (0, \varepsilon]$

Pauta Pregunta Conceptual Prueba 1.

Nota de Corrección: las respuestas son inequívocas si se lee el enunciado con todo detalle, sin la justificación puede variar. De la misma forma si el enunciado no se interpreta correctamente la respuesta puede diferir de la que aparece en la pauta, pero la justificación ser coherente. Hay que tener criterio en la corrección.

1. Comente y justifique la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- a) La complejidad de un problema es posible determinarla matemáticamente encontrando el orden de un algoritmo que resuelve el peor caso.

Respuesta: Falso, es posible determinando una cota inferior matemáticamente y una superior mediante un algoritmo particular, si ambas son iguales entonces esa es la complejidad.

- b) Con una heurística adecuada es posible encontrar la mejor solución de un problema de optimización.

Respuesta: Verdadero, ES POSIBLE, sin embargo casi nunca se logra. Con una heurística tal vez es posible encontrar una solución factible, y la calidad de esta (medida por el gap entre la fo de esta solución y de la solución óptima) dependerá de la heurística en particular y del problema.

- c) Si se encuentra un algoritmo polinomial para un problema NP-completo, es posible resolver polinomialmente todos los problemas de la clase NP.

Respuesta: Verdadero, esto viene de la definición de la algoritmo NP-completo y de la conjetura aún abierta acerca de si existe un algoritmo de este tipo.

- d) En un problema de programación lineal la condición de KKT siempre es suficiente.

Respuesta: Verdadero, porque el espacio factible y la función objetivo son convexos.

- e) En un problema de programación lineal, modificar el valor de un coeficiente del lado derecho de las restricciones significa que existan más o menos soluciones factibles.

Respuesta: Falso, esto solo es cierto en el caso de modificar el coeficiente de restricciones activas.

- f) Un problema de programación lineal tiene infinitas soluciones cuando es no acotado.

Respuesta: Falso, tiene infinitas soluciones cuando la pendiente de la función objetivo es la misma que la de uno de los hiperplanos activos que definen el espacio factible.

- g) En un problema lineal mixto con variables binarias no se puede multiplicar una variable $\{0, 1\}$ con una variable continua porque esa expresión es no lineal.

Respuesta: Verdadero, siempre multiplicar dos variables es una función no lineal.

2. Responda las siguientes preguntas:

- a) ¿Porqué la solución de los siguientes problemas es la misma?

$$\begin{array}{ll} \text{(P1)} & \min f(x) \\ \text{s.a.} & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(P2)} & \max -f(x) \\ \text{s.a.} & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

Respuesta:

Porqué en el problema (P1) se busca avanzar en la dirección de máximo decrecimiento de $f(x)$ en el conjunto factible definido por las restricciones $g_i(x) \leq 0, i = 1 \dots m$, $-\nabla f(x)$. En (P2) busca se avanzar en la dirección de máximo crecimiento de $-f(x)$ en el mismo conjunto factible, la cual es justamente $-\nabla f(x)$.

También puede ser demostrado tomando dos pto x_1 solución óptima de (P1) y x_2 solución óptima de (P2) y demostrando que son el mismo, o también partiendo que son distintos y llegar a una contradicción.

- b) Para problemas de optimización no lineal irrestricta, en que casos recomendaría utilizar el método del gradiente y en cuales el método de Newton, ¿porqué, que precauciones tomaría al momento de iniciar el algoritmo?

Respuesta:

Método del Gradiente:

- 1) Si las superficies de nivel son hipersferas (circunferencias en 2 o más dimensiones), ya que el método encuentra el mínimo en una iteración. El caso contrario se puede verificar cuando en iteraciones sucesivas del método los gradientes son ortogonales entre sí.

- 2) Si $Hf(x^k)$ es singular y por consiguiente no invertible ya que es necesario para el método de Newton

Método del Gradiente:

Si las superficies de nivel son excéntricas (elipsoides), ya que el gradiente converge muy lentamente.

Precaución: elegir convenientemente el punto x_0 ya que la sucesión generada por el método puede converger a un máximo.

- c) Sea el problema (P)

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad & \min f(x) \\ \text{s.a.} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad \} = S \end{aligned}$$

Demuestre la primera condición de optimalidad: Sea \bar{x} un mínimo local del problema (P). Entonces $\nabla f(\bar{x}) \cdot d \geq 0, \forall d \in D(\bar{x}) = \{d \in R^n / d \text{ es dirección factible en } S \text{ con respecto a } \bar{x}\}$.² ¿Geométricamente que interpretación le puede dar?

Respuesta:

Demostración:

Sean $d \in D(\bar{x})$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\bar{x} + \lambda d \in S, \forall \lambda \in (0, \varepsilon]$.

Como \bar{x} es mínimo local, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(\bar{x}), \forall x \in B(\bar{x}, \delta) \cap S$.

Por otro lado, si $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$, entonces existe $0 < \bar{\varepsilon} < \min\{\varepsilon, \delta\}$ tal que $f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x}), \forall \lambda \in (0, \bar{\varepsilon}]$.

Pero $\bar{x} + \lambda d \in S$ y esto contradice el hecho de que \bar{x} es mínimo local de (P).

Geométricamente, si \bar{x} es mínimo local de (P) \Rightarrow todas las direcciones factibles en \bar{x} tienen ángulo $\leq 90^\circ$ con el vector $\nabla f(\bar{x})$ (lo que significa que f crece en cualquier dirección factible en \bar{x}).

- d) Considere el problema (P) del pto. 2c ¿Porqué la condición de KKT es suficiente solo si la función f y el cjto. S son convexos?

Respuesta:

Antes de justificar el porque necesitamos notar lo siguiente:

Dado que la función f y el conjunto S son convexos, entonces si \bar{x} es óptimo local también es óptimo global. Además, la primera condición de optimalidad es válida para toda dirección factible en S con respecto a \bar{x} . Entonces dado que para cualquier $x \in S : (x - \bar{x})$ es dirección factible entonces $\nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) \geq 0, \forall x \in S$ (*).

Dado esto, demostraremos que si los vectores $\bar{x}, \bar{\mu}$ cumplen KKT entonces \bar{x} es óptimo local. Sea x una solución factible para P . Entonces dado que $g_i(x) \leq 0$ y $g_i(\bar{x}) = 0, \forall i \in I(\bar{x})$, se tiene que $g_i(x) \leq g_i(\bar{x})$, y por la convexidad de g_i en S se tiene que:

$$g_i(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}) \leq \lambda g_i(x) + (1 - \lambda)g_i(\bar{x}) \leq g_i(\bar{x})$$

$\forall \lambda \in [0, 1]$. Esto implica que la función g_i no crece cuando la variable \bar{x} se mueve en la dirección $d = x - \bar{x}$. Entonces, se tiene que

$$\nabla g_i(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \leq 0$$

Multiplicando lo anterior por $\bar{\mu}_i$ y sumando sobre $i \in I(\bar{x})$ se tiene:

$$\left[\sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\mu}_i \nabla g_i(\bar{x}) \right]^T (x - \bar{x}) \leq 0$$

Luego multiplicando la condición de KKT por $(x - \bar{x})$ para que se cumpla lo anterior necesariamente se tiene que $\nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) \geq 0$, luego \bar{x} es óptimo global por (*).

²Sea $x \in S$, un vector $d \in R^n$ es una **dirección factible** en S con respecto a x si existe $\varepsilon > 0$ tal que $x + \lambda d \in S, \forall \lambda \in (0, \varepsilon]$

Nota de corrección: es posible dar una explicación cualitativa pero no incluye todo pje de la pregunta.

Problema 2

(a) Primero debemos pasar el problema a forma estándar,

$$\text{Min } f'(x_1, x_2) = -(x_1 - 6)^2 - (x_2 - 4)^2$$

$$\text{s.a. } (g_1)x_1^2 - x_2 \leq 0$$

$$(g_2)x_1^2 + x_2 - 8 \leq 0$$

$$(g_3)4x_1 - x_2 - 4 \leq 0$$

Calculamos los gradientes de f , y de los g_i ,

$$\nabla f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -2(x_1 - 6) \\ -2(x_2 - 4) \end{pmatrix} \quad \nabla g_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \nabla g_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nabla g_3(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Analizamos si los siguientes puntos cumplen la condición necesaria de KKT,

- (0,0). En este punto la única restricción activa es g_1 . Luego $\mu_2 = \mu_3 = 0$.

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \sim \exists \mu_1 > 0 \text{ que cumpla ambas ecuaciones. Por lo tanto } \mathbf{no \text{ cumple KKT.}}$$

(0.5)

- (2,4). En este punto todas las restricciones son activas, Luego $\mu_i \in R, \forall i = 1, 2, 3$.

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 8 + 4\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3 = 0 \\ 0 - \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 8 + 8\mu_2 = 0$$

$$\mu_2 = -1 < 0$$

$$\mu_1 = \mu_3 = -\frac{1}{2} < 0$$

No cumple KKT (0.5)

- (6,4) Ninguna restricción es activa, luego $\mu_i = 0, \forall i = 1, 2, 3$. Tenemos también $\nabla f'(6,4) = 0$, por lo tanto **si cumple KKT. (0.5)**

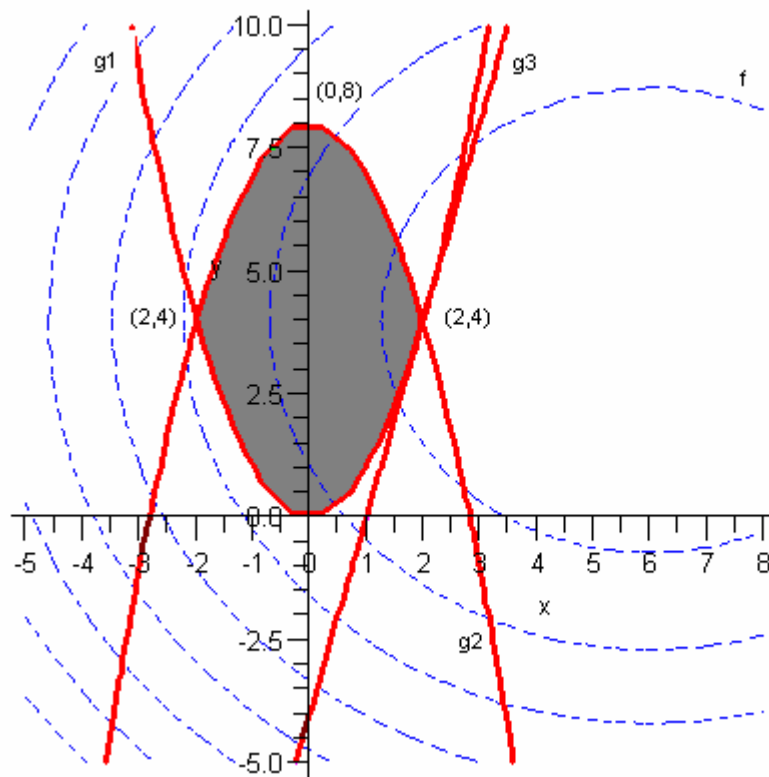
(b)

- (0,0) El punto es regular y no cumple la condición suficiente de KKT, por lo tanto no puede ser óptimo. **(0.5)**
- (2,4) Ídem, luego no puede ser óptimo. **(0.5)**
- (6,4) Este punto **esta fuera del conjunto factible**, no puede ser óptimo. **(0.5)**

Nota: como la función f del problema estándar es cóncava, no podemos asegurar la optimalidad, pero si podemos concluir acerca de la no-optimalidad de cualquier punto, que es lo que básicamente sucede con los puntos (0,0) y (2,4)

Optimo ==> Cond. Necesaria KKT
~Cond. Necesaria KKT ==> ~Optimo

(c) **(1.5)**



Basta con dibujar las 3 restricciones, las curvas de nivel de la función objetivo y mostrar la región factible.

(d) En vista de la forma del conjunto factible y la dirección de máximo crecimiento de f , el punto óptimo debería ser $(-2, 4)$. **(0.5)** Por comprobar si cumple KKT

Las restricciones activas son g_1 y g_2 , luego $\mu_3 = 0$.

$$\begin{pmatrix} 16 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = 2$$

El punto cumple KKT. **(0.5)**

(d) El óptimo es el punto $(-2, 4)$. **(0.25)**

El valor de la función objetivo es $f(-2, 4) = (-2 - 6)^2 + (4 - 4)^2 = 64$ **(0.25)**

Problema 3

El siguiente es un modelo lineal de variable entera binaria que resuelve el problema del Sudoku.

Variables de Decisión (0.4)

$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{si el elemento } (i,j) \text{ de la matriz del Sudoku contiene al entero } k \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$
 $i, j, k = 1, \dots, 9$

Naturaleza de las Variables

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \quad (0.1)$$

Función objetivo (0.5)

$$\text{Min} \sum_{k=1}^9 \sum_{i=1}^9 kx_{iik}$$

Restricciones

1. $\sum_{i=1}^9 x_{ijk} = 1, \quad \forall j, k$ Solo un k en cada columna. No se repiten números en las columnas
(1)
2. $\sum_{j=1}^9 x_{ijk} = 1, \quad \forall i, k$ Solo un k en cada fila. No se repiten números en las filas. (1)
3. $\sum_{j=3q-2}^{3q} \sum_{i=3p-2}^{3p} x_{ijk} = 1, \quad \forall p, q = 1, 2, 3 \quad \forall k$ Solo un k en cada subcuadrado. No se repiten números en los subcuadrados (1)
4. $\sum_{k=1}^9 x_{ijk} = 1, \quad \forall i, j$ Todas las posiciones de la matriz (i,j) tienen uno y solo un numero asignado. (1)
5. $x_{k_i l_i n_i} = 1, \quad \forall i = 1..t$ Condiciones iniciales. Existen casillas que ya contienen números. (1)

Puede perfectamente existir otra formulación correcta para el problema propuesto.

Dudas y comentarios a:
Jaime Gacitúa jgacitua@ing.uchile.cl