



Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Civil Industrial.
IN34A Optimización

Profesores: Guillermo Durán.
Richard Weber.
Daniel Espinoza.
Auxiliares: Leonardo López.
Gonzalo Romero.
Rodrigo Wolf.

Pauta Control N°1 11 de Abril de 2007

P1) Responda brevemente las siguientes preguntas. (1.2 puntos cada una)

a) Explique la diferencia entre un algoritmo exacto y una heurística.

R: Un algoritmo exacto para un problema resuelve el problema en todas sus instancias, mientras que una heurística es un algoritmo que busca encontrar soluciones factibles razonables, pero sin que exista alguna medida de calidad para tales soluciones (i.e. pueden ser arbitrariamente malas).

b) Dado el problema:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{Min } f(x) \\ \text{s.a. } g_i(x) \leq 0 \quad \forall i \in I \end{array}$$

Bajo qué condiciones para f , g_i el método del gradiente es un algoritmo exacto para (P)

R: si f es convexa, el conjunto de soluciones factibles es \mathbb{R}^n (o equivalentemente I es conjunto vacío), y $f(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, el algoritmo del gradiente converge a x^* solución óptima para (P).

c) ¿Puede existir un algoritmo polinomial para algún problema en NP ?, ¿Qué significaría esto?

R: Si, en ese caso demostraría que el problema no sólo está en NP, sino que el problema está en (P).

d) ¿Cual es la diferencia entre NP y NP-completo?

R: Por definición NP-completo es un subconjunto de NP, pero los elementos de NP-completo cumplen la propiedad que cualquier problema en NP puede reducirse polinomialmente a ellos.

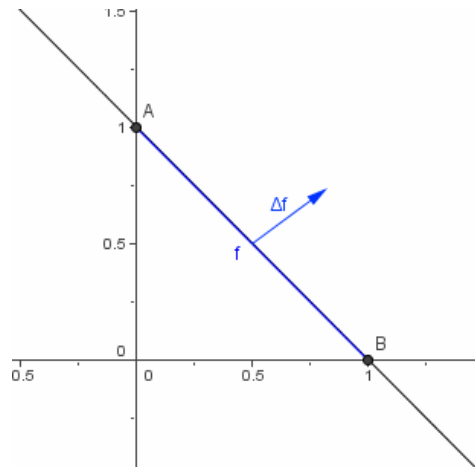
e) ¿Puede haber un óptimo de un problema lineal en un punto que no es un vértice del conjunto factible? Demuestre o exhiba un ejemplo (de acuerdo a cuál sea su respuesta).

R: Si, en el caso en que la pendiente de la función objetivo coincida con la pendiente de una de las restricciones activas, y la función crezca (decrezca) hacia la restricción en un problema de maximización (minimización). Las soluciones óptimas serán infinitas en ese segmento del poliedro factible, y, excepto dos, no serán vértices. Si exhiben un ejemplo es mitad de puntaje por el dibujo y mitad por el problema.

Ej:

$$\text{Max } x + y$$

$$\text{s.a. } \begin{aligned} x + y &= 1 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$



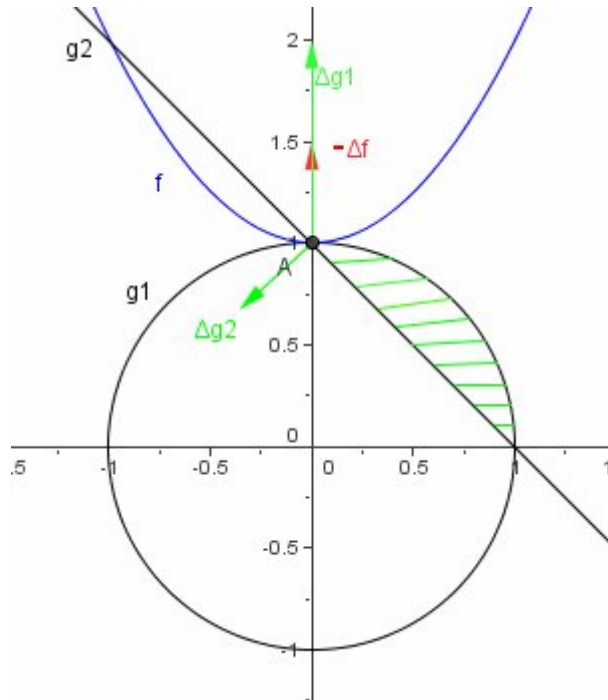
P2) Sea el siguiente problema no lineal:

$$\text{Min } x^2 - y$$

$$\text{s.a. } \begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 1 \\ x + y &\geq 1 \end{aligned}$$

a) **Dibuje la región factible, las curvas de nivel de la función objetivo, y encuentre el óptimo gráficamente. (1 pto.)**

R: El óptimo, por inspección gráfica, es $A=(0,1)$, con un valor de $Z=-1$.



b) **Verifique geométrica y analíticamente que el punto encontrado en a) cumple las condiciones de KKT. (1 pto.)**

R: Las condiciones de KKT son:

$$\exists \mu_i \geq 0 \quad \text{tq} \quad \nabla f(x) + \sum_i \mu_i \cdot \nabla g_i = 0 \quad \text{y} \quad \mu_i \cdot g_i = 0 \quad \forall i$$

Para aplicarlas pasamos el problema original a la forma estándar quedando:

$$\text{Min } x^2 - y$$

$$\text{s.a. } \begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &\leq 0 \\ -x - y + 1 &\leq 0 \end{aligned}$$

Luego, por las condiciones de holgura complementaria, $\mu_i \in \mathbb{R} \ \forall i$ ya que ambas restricciones son activas en el punto A.

Por lo que la primera condición de KKT evaluada en A queda:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu_1 * \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \mu_2 * \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De donde se concluye que $\mu_1 = \frac{1}{2} \geq 0$ y $\mu_2 = 0 \geq 0$ por lo que el punto A cumple KKT.

Geométricamente, se observa en el grafico que efectivamente menos el gradiente (estamos minimizando) es una función lineal solo del gradiente de g_1 .

c) ¿Puede afirmar teóricamente que el punto encontrado en a) es mínimo global del problema? Justifique. (1 pto.)

R: Si, porque tanto las restricciones como la función objetivo son funciones continuas y convexas por lo que la condición de KKT es necesaria y suficiente.

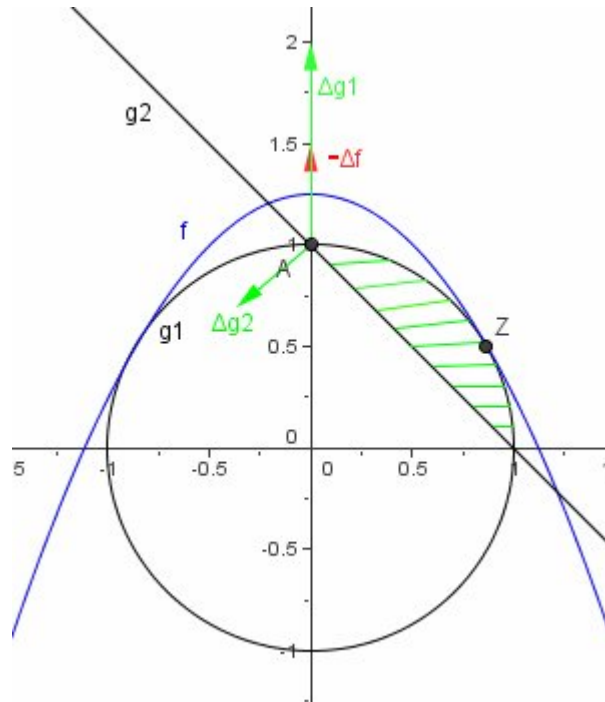
En efecto, la región factible es convexa (la recta entre 2 puntos del conjunto pertenece siempre al conjunto, es la región interior de un círculo, etc.).

Además, el hessiano de la función objetivo es $H(f(x)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ por lo que el producto

$B * H(f(x)) * B$ es igual a $2 * (b_1)^2 \geq 0$ para cualquier vector A (i.e. el hessiano es semidefinido positivo $\rightarrow f$ es convexa)

Suponga ahora que la función objetivo cambia a:

$$\text{Max } x^2 + y$$



d) ¿El punto encontrado en a) sigue verificando KKT? Justifique. (1 pto.)

R: Si, geométricamente se observa que el punto $A=(0,1)$ sigue cumpliendo KKT. En efecto, las ecuaciones de KKT y su solución siguen siendo las mismas (Recordar pasar el problema a su forma estándar antes de aplicar el criterio, es decir, la función objetivo queda $\text{Min } -x^2 - y$; por lo que el gradiente de la función objetivo evaluado en A sigue siendo el mismo y las restricciones son las mismas)

e) ¿El punto encontrado en a) es óptimo para el nuevo problema? Justifique. (1 pto.)

R: No, ya que por ejemplo el punto $(\sqrt{3}/4; 1/2)$ está en la región factible y su valor evaluado en la nueva función objetivo es $z = (5/4) > 1$ que es el valor de la función objetivo evaluada en $A=(0,1)$.

De hecho, $(\sqrt{3}/4; 1/2)$ es el óptimo global. Basta encontrar cualquier punto de la región factible con un valor de la función objetivo mayor.

Obs: cualquier par $(1-y^2, y)$ con y en $(0,1)$ sirve.

f) Justifique por qué se pueden dar las situaciones descritas en d) y e). (1 pto.)

R: En este caso, la función objetivo es cóncava, por lo que la condición de KKT es una condición necesaria pero no suficiente. Es decir, pueden existir puntos que cumplan KKT y no sean óptimos locales ni globales.

En efecto, el hessiano de la función objetivo es $H(f(x)) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ por lo que el

producto $B^*H(f(x))*B$ es igual a $-2*(b_1)^2 \leq 0$ para cualquier vector A (i.e. el hessiano es semidefinido negativo $\rightarrow f$ es cóncava)

P3) La Universidad de la Cordillera está organizando un nuevo Magíster en Investigación de Operaciones para el año 2007 y para ello ha definido una serie de criterios para seleccionar a los 40 alumnos del total de 200 postulantes.

Los 200 postulantes han pasado por un examen de admisión del que han salido con un puntaje P_i para cada postulante i del conjunto I .

Dado que la Universidad quiere cambiar su perfil, ha decidido fomentar la participación de mujeres y de personas nacidas fuera de la Región Metropolitana, y ha establecido entonces que al menos un 25% de los seleccionados deben ser mujeres y un 40% deben ser de Regiones. Para esto se han definido los subconjuntos M que incluye a los postulantes que son mujeres, y R que contiene a los postulantes de Regiones.

Como se quiere priorizar a los postulantes con mejor puntaje, se ha decidido que el 5% con mejor puntaje en el examen de admisión tiene que ser obligatoriamente elegido y, además, dados cualesquiera 2 postulantes con la misma situación de género (hombre/mujer) y lugar de nacimiento (RM/Regiones), no puede ocurrir que uno de ellos sea elegido si tiene puntaje menor que el otro (esta condición rige para postulantes que comparten ambas condiciones). Para esto se han definido los subconjuntos C_p , p en $\{1,2,3,4\}$, con los postulantes que comparten alguna combinación de ambos atributos.

Por otra parte, se pretende que el último de los elegidos (según el ranking de puntajes), tenga el mejor ranking (o, equivalentemente, el mayor puntaje) posible.

a) Diseñe un modelo de programación lineal entera que permita a la Universidad de la Cordillera elegir a sus 40 alumnos para el nuevo Magíster, respetando todas las condiciones solicitadas.

b) Modifique la función objetivo de modo que se maximice la suma total de los puntajes de los postulantes elegidos. ¿Daré siempre la misma solución óptima con ambas funciones objetivos? Justifique (demuestre o dé un pequeño ejemplo).

PAUTA P3)

a) Hay al menos 2 formas de modelar el problema:

Supuesto: La lista de puntajes esta ordenada de manera decreciente.

i.e. $P_1 > P_2 > \dots > P_{200}$

Variables: (0.5 ptos en total, 0.25 por cada una)

$x_i = 1$ si el postulante y es elegido, 0 si no.

y = variable auxiliar que almacena **la posición** del último postulante elegido.

(z = variable auxiliar que almacena el **puntaje** del último postulante elegido.)

Parámetros y conjuntos:

P_i = puntaje obtenido por el postulante i .

I = conjunto que contiene el total de postulantes.

M = subconjunto de postulantes que son mujeres.

R = subconjunto de postulantes que son de regiones.

Restricciones:

- a) El total de postulantes elegidos debe ser 40. (0.5 ptos.)

$$\sum_{i \in I} x_i = 40$$

- b) Se deben elegir al menos 10 postulantes mujeres o 25%. (0.5 ptos.)

$$\sum_{i \in M} x_i = 10$$

- c) Se deben elegir al menos 16 postulantes de regiones o 40%. (0.5 ptos.)

$$\sum_{i \in R} x_i = 16$$

- d) Siempre que hayan dos postulantes con igual combinación de atributos se debe elegir al de mayor puntaje primero. (0.5 ptos.)

$$x_i \geq x_j \quad \forall p \quad \forall i < j \quad \text{con } (i, j) \in C_p$$

- e) El 5% de los postulantes con mejor puntaje debe ser elegido obligatoriamente. (0.5 ptos.)

$$x_i = 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, 10\}$$

- f) Definición de la variable auxiliar. (0.8 pto.)

$$i \cdot x_i \leq y \quad \forall i$$

$$(z \leq x_i \cdot P_i + (1 - x_i) \cdot M \quad \forall i \quad M \gg 1)$$

- g) Naturaleza de las variables. (0.5 ptos.)

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i$$

$$y \in \mathbb{Z}$$

$$(z \in \mathbb{Z})$$

Función Objetivo: (0.7 pto)

Min y
(Max z)

b) En esta parte se eliminaría la variable auxiliar, y la nueva función objetivo queda: (0.5 ptos.)

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{200} x_i \cdot P_i$$

Las funciones objetivo no entregan siempre el mismo resultado. No es lo mismo maximizar al mínimo, que maximizar la suma de las variables.(0,5 ptos con el ejemplo)

Ej: Suponga que dentro de los primeros 38 postulantes se cumplen todas las restricciones excepto que faltan una mujer y una persona de regiones. Además, los 4 siguientes postulantes son:

I	Mujer	Region	Pi
39	NO	NO	60
40	SI	NO	54
41	NO	SI	52
42	SI	SI	50
...

Si el objetivo es maximizar la suma de los puntajes conviene elegir a los postulantes 39 y 42 con una suma de puntaje de 110 pero un mínimo de 50 puntos. Mientras que si el objetivo es maximizar el mínimo puntaje elegido, conviene elegir a los postulantes 41 y 42 con una suma de puntaje de 106 pero un mínimo de 52 puntos.

Dudas y Consultas a:
Gonzalo Romero – gromero@ing.uchile.cl