



Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Civil Industrial.
IN34A Optimización

Profesor: Guillermo Durán.
Richard Weber.
Auxiliares: Marianela Pereira.
Rodrigo Wolf.
Ximena Schultz.

Control N°2 10 de mayo de 2006

Pregunta 1

- a) Suponga que debe producir mesas y sillas, las que reportan un beneficio de 4[U.M.] y 2[U.M.] cada una, respectivamente. Para ello necesita madera y clavos. Actualmente sabe que necesita 3 kilos de madera para cada mesa, y 1 kilo para cada silla y 10 clavos para cada mesa, y 20 para cada silla. Suponga que cuenta con 21 kilos de madera y 100 clavos. Plantee el PPL y su dual, y mencione cuanto estaría dispuesto a pagar por una unidad adicional de cada insumo. Justifique.

Nota: La inversa de la base en el óptimo es: $\begin{pmatrix} 20/50 & -1/50 \\ -10/50 & 3/50 \end{pmatrix}$

- b) ¿Qué significa que el algoritmo Simplex es un algoritmo exponencial? Mencione un algoritmo polinomial para problemas de programación lineal y la idea básica de su funcionamiento. **(1,5)**
- c) Plantee y describa con palabras el significado del Teorema de la Holgura Complementaria. **(1,5)**
- d) ¿Cómo se da cuenta durante la aplicación del algoritmo Simplex de óptimos alternativos, soluciones degeneradas y un problema no acotado? Mencione el criterio correspondiente y de la interpretación adecuada. **(1,5)**

Pregunta 2

Dado el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{(P) max} \quad & 2X_2 - X_1 \\ \text{s.a.} \quad & 5X_2 - 3X_1 \leq 15 \\ & 4X_2 - X_1 \leq 20 \\ & 4X_2 + 7X_1 \leq 84 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- a) Grafique el problema. **(0,5)**
- b) Resuelva utilizando Simplex matricial comenzando en el origen. Indique en el gráfico lo que está sucediendo en cada iteración (interpretando variables básicas y no básicas). **(3)**

- c) ¿Cuánto puede variar el coeficiente que acompaña a X_1 en la función objetivo (c_1) con respecto al que acompaña a X_2 (c_2)? Resuelva utilizando Simplex e interprete gráficamente. **(0,8)**
- d) Suponga que la última restricción es una restricción de capacidad. ¿Cuánto puede variar la capacidad del recinto sin afectar el óptimo del problema? Resuelva utilizando Simplex e interprete gráficamente. Una vez encontrada la cota indique si antes de alcanzarla adicionalmente, varía el valor de la función objetivo en el óptimo. **(0,8)**
- e) ¿En qué cambia la resolución del problema (P), si la primera restricción cambia a $5X_2 - 3X_1 \geq 15$? Indique el cambio en la región factible gráficamente, y muestre por qué la base inicial utilizada en la parte b) ya no es factible. ¿Qué se debe hacer en este caso? (solo indique, no resuelva) **(0,9)**

Pregunta 3

La empresa GIUSEPPE S.A. fabrica *PROD* tipos de tubos diferentes para riego y cuenta para ello con *MAQ* máquinas diferentes. Cada tubo se puede producir en cada una de las máquinas.

El costo de producir una tonelada del tubo i en la máquina j es cp_{ij} . El precio de venta de una tonelada del tubo i es p_i .

A lo largo de un mes se puede usar la misma máquina para producir diferentes tubos. El costo de realizar un cambio de producto en la máquina j es cc_j . La cantidad máxima de cambios permitidos en la máquina j durante el mes k es $Camb_{jk}$ (asumimos que el primer seteo de un mes también es un cambio).

La demanda prevista del tubo i para el mes s es D_{is} , mientras que PD_{is} es la parte de la demanda del tubo i en el mes s que se admite que no sea satisfecha. Podemos suponer que la demanda ocurre toda junta al final del mes.

Se permite que la firma produzca en un mes para demanda que tendrá en un mes posterior, pero incurrirá en un costo de stock que se mide a través del capital inmovilizado (asumimos que $porc$ es la tasa mensual de interés bancario).

La cantidad de horas necesarias para la producción de una tonelada del tubo i en la máquina j es $hton_{ij}$; la cantidad de horas que demanda un cambio en la máquina j es h_j y la cantidad de horas que puede estar prendida la máquina j (produciendo o en un cambio) durante el mes k es HS_{jk} .

Tenemos que planificar la producción para los próximos CM meses, maximizando la ganancia de la firma.

Formular un modelo de Programación Lineal Entera para resolver el problema.

(Sugerencia: contemplar en el modelo el mes en que se produce y para qué mes se produce)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -4/5 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 7/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/7 \\ 0 & 1 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/7 & 3/7 & 0 \\ -4/7 & 5/7 & 0 \\ 32/7 & -47/7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7/47 & 0 & 3/47 \\ -32/47 & 1 & -7/47 \\ -4/47 & 0 & 5/47 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4/7 & 5/7 & 0 \\ -1/7 & 3/7 & 0 \\ 32/7 & -47/7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -47/32 & 7/32 \\ 0 & 7/32 & 1/32 \\ 0 & -1/8 & 1/8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4/47 & 0 & 5/47 \\ -32/47 & 1 & -7/47 \\ 7/47 & 0 & 3/47 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -47/32 & 7/32 \\ 0 & -1/8 & 1/8 \\ 0 & 7/32 & 1/32 \end{pmatrix}$$

Pauta:

Pregunta 1

a) El PPL queda: **(0,2pto.)**

$$\begin{aligned} \text{(P) max} \quad & 4X_1 + 2X_2 \\ \text{s.a.} \quad & 3X_1 + X_2 \leq 21 \\ & 10X_1 + 20X_2 \leq 100 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

El Dual queda: **(0,5pto.)**

$$\begin{aligned} \text{(P) min} \quad & 21Y_1 + 100Y_2 \\ \text{s.a.} \quad & 3Y_1 + 10Y_2 \geq 4 \\ & Y_1 + 20Y_2 \geq 2 \\ & Y_1, Y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Se calculan los precios sombra como:

$$\pi = c_B^T \cdot B^{-1} = (4 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 20/50 & -1/50 \\ -10/50 & 3/50 \end{pmatrix} = (1,2 \quad 0,04)$$

De donde se concluye que se está dispuesto a pagar 1,2[U.M.] máximo por un kilo más de madera, y 0,4[U.M.] por un clavo más. Pues esa es el beneficio marginal que una unidad más de cada insumo le reportan al valor de la función objetivo. **(0,8ptos.)**

Nota: El cálculo también podía hacerse utilizando el teorema de Holgura Complementaria.

- b) Simplex recorre puntos extremos de un poliedro y el número de estos puede llegar a ser exponencial en el tamaño del problema. **(0,7ptos.)** El algoritmo de Karmarkar es de tiempo polinomial. La característica central de este algoritmo es que se mueve por el interior de la región factible (y no por los vértices, como el SIMPLEX). Se lo conoce como un algoritmo de punto interior. **(0,8ptos.)**
- c) Sean x_1, \dots, x_n solución factible del primal e y_1, \dots, y_m solución factible del dual. Las siguientes son condiciones necesarias y suficientes para optimalidad simultánea de x e y :

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j \quad \forall j \quad \text{y/o} \quad x_j^* = 0 \quad \forall j \quad \quad \text{y} \quad \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = b_i \quad \forall i \quad \text{y/o} \quad y_i^* = 0 \quad \forall i$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} (A_{i\bullet} \cdot x^* - b_i) \cdot y_i^* &= 0 & \forall i \\ (c_j - y^* \cdot A_{\bullet j}) \cdot x_j^* &= 0 & \forall j \end{aligned}$$

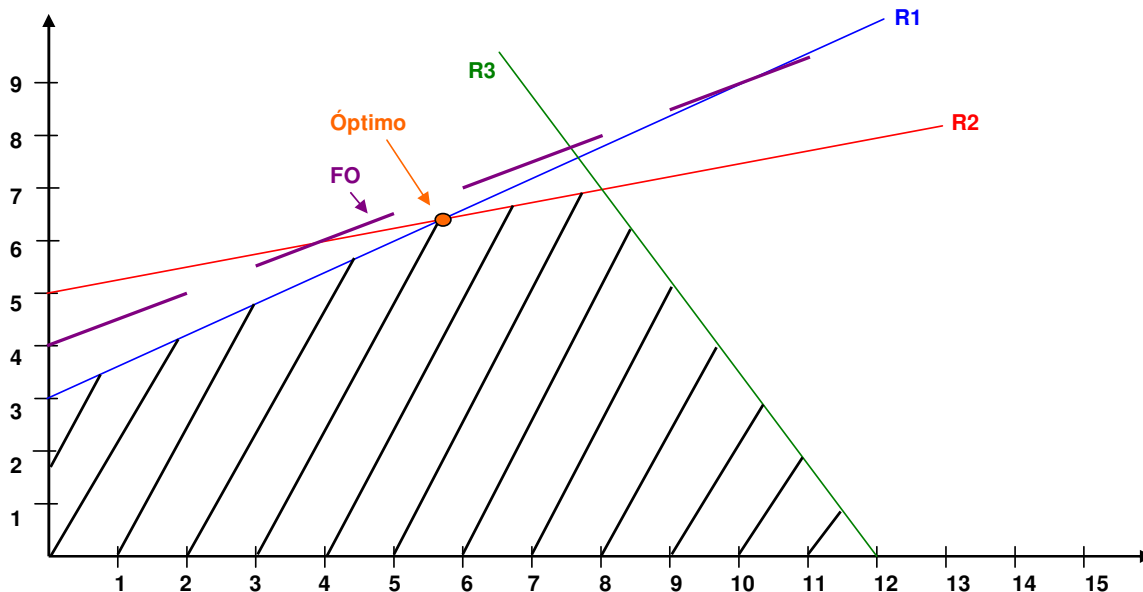
Lo que otorga una condición necesaria y suficiente para que x^* e y^* sean óptimos. **(1,5ptos.)**

- d) El algoritmo Simplex se da cuenta que existen óptimos alternativos al ver que en el óptimo uno de los costos reducidos se hace cero, soluciones degeneradas las encuentra cuando en el criterio de salida de la base hay dos variables que se anulan simultáneamente y un problema no acotado lo identifica cuando no hay variable posible a sacar de la base (Se identifica cuando en el criterio de salida todos los \bar{a}_{is} asociados son negativos). **(0,5pto. cada uno con la interpretación)**

Nota: La interpretación puede ser gráfica.

Pregunta 2

- a) **0,5ptos. (deben indicar restricciones, F.O., y región factible)**



- b) Primero se lleva al problema a la forma estándar:

$$\begin{aligned}
 (P^*) \quad & \min \quad -2X_2 + X_1 \\
 \text{s.a.} \quad & 5X_2 - 3X_1 + X_3 = 15 \\
 & 4X_2 - X_1 + X_4 = 20 \\
 & 4X_2 + 7X_1 + X_5 = 4 \\
 & X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

Comenzamos del origen, por lo que las variables no básicas son X_1 y X_2 . Las variables básicas son X_3 , X_4 y X_5 . Con lo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
R &= \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{R} = B^{-1} \cdot R = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \\
b &= \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 84 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{b} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 84 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Vemos si el punto de partida es óptimo analizando los costos reducidos:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_R &= c_R - c_B \cdot \bar{R} = (1 \quad -2) - (0 \quad 0 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \bar{c}_R = (1 \quad -2)
\end{aligned}$$

\Rightarrow No estamos en el óptimo pues existen costos reducidos menores que cero.

Criterio de entrada a la base: Entra aquel con menores costos reducidos \Rightarrow entra X_2 .

Criterio de salida de la base: $\min_{a_{is} \geq 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right\} = \min \left\{ \frac{15}{5} \quad \frac{20}{4} \quad \frac{84}{4} \right\} \Rightarrow$ sale X_3 .

Esto implica que las nuevas variables no básicas son X_1 y X_3 . Las variables básicas son X_2 , X_4 y X_5 . Con lo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -4/5 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
R &= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{R} = B^{-1} \cdot R = \begin{pmatrix} -3/5 & 1/5 \\ 7/5 & -4/5 \\ 47/5 & 0 \end{pmatrix} \\
b &= \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 84 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{b} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 81 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Vemos si el punto es óptimo analizando los costos reducidos:

$$\begin{aligned}\bar{c}_R &= c_R - c_B \cdot \bar{R} = (1 \ 0) - (-2 \ 0 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} -3/5 & 1/5 \\ 7/5 & -4/5 \\ 47/5 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \bar{c}_R &= (-1/5 \ 2/5)\end{aligned}$$

\Rightarrow No estamos en el óptimo pues existen costos reducidos menores que cero.

Criterio de entrada a la base: Entra aquel con menores costos reducidos \Rightarrow entra X_1 .

$$\text{Criterio de salida de la base: } \min_{a_{is} \geq 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right\} = \min \left\{ \frac{40}{7} \quad \frac{405}{47} \right\} \Rightarrow \text{sale } X_4.$$

Esto implica que las nuevas variables no básicas son X_4 y X_3 . Las variables básicas son X_2 , X_1 y X_5 . Con lo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}B &= \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 3/7 & 0 \\ -4/7 & 5/7 & 0 \\ 32/7 & -47/7 & 1 \end{pmatrix} \\ R &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{R} = B^{-1} \cdot R = \begin{pmatrix} 3/7 & -1/7 \\ 5/7 & -4/7 \\ -47/7 & 32/7 \end{pmatrix} \\ b &= \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 84 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{b} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 45/7 \\ 40/7 \\ 128/7 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Vemos si el punto es óptimo analizando los costos reducidos:

$$\begin{aligned}\bar{c}_R &= c_R - c_B \cdot \bar{R} = (0 \ 0) - (-2 \ 1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 3/7 & -1/7 \\ 5/7 & -4/7 \\ -47/7 & 32/7 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \bar{c}_R &= (1/7 \ 2/7)\end{aligned}$$

\Rightarrow Estamos en el óptimo. **(2ptos.)**

Este es: $X_1 = 40/7$, $X_2 = 45/7$ y el valor de la función objetivo es $z = 50/7$

Lo importante a indicar gráficamente es que comienzan en el punto (0,0), se mueven al (0,3) y luego terminan en el $(40/7, 45/7)$. Estos valores los determinan las variables básicas y no básicas. Cuando una variable artificial sale de la base, quiere decir que se hace cero, y por tanto la restricción asociada a esa variable básica es activa y nos encontramos en el punto donde lo es. **(1pto)**

Nota: No necesitan hacerlo explícitamente el gráfico. Solo indicarlo.

c) Se tiene que seguir cumpliendo que $\bar{c}_R = c_R - c_B \cdot \bar{R} \geq 0$, esto es:

$$\bar{c}_R = (0 \quad 0) - (-c_2 \quad c_1 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 3/7 & -1/7 \\ 5/7 & -4/7 \\ -47/7 & 32/7 \end{pmatrix} = \left(\frac{3 \cdot c_2 - 5 \cdot c_1}{7} \quad \frac{-c_2 + 4 \cdot c_1}{7} \right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{5}c_2 \geq c_1 \geq \frac{1}{4}c_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{5} \geq \frac{c_1}{c_2} \geq \frac{1}{4} \quad \textbf{(0,5ptos.)}$$

Esto quiere decir que la pendiente de la función objetivo no puede ser mayor que la de la primera restricción $(3/5)$ y no puede ser menor que la de la segunda restricción $(1/4)$. Lo que se puede observar claramente en el gráfico, pues si pasa esos límites el óptimo cambia a uno de los dos puntos adyacentes al original. **(0,3ptos.)**

d) Se tiene que seguir cumpliendo que $\bar{b} = B^{-1} \cdot b \geq 0$, esto es:

$$\bar{b} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1/7 & 3/7 & 0 \\ -4/7 & 5/7 & 0 \\ 32/7 & -47/7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ b_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

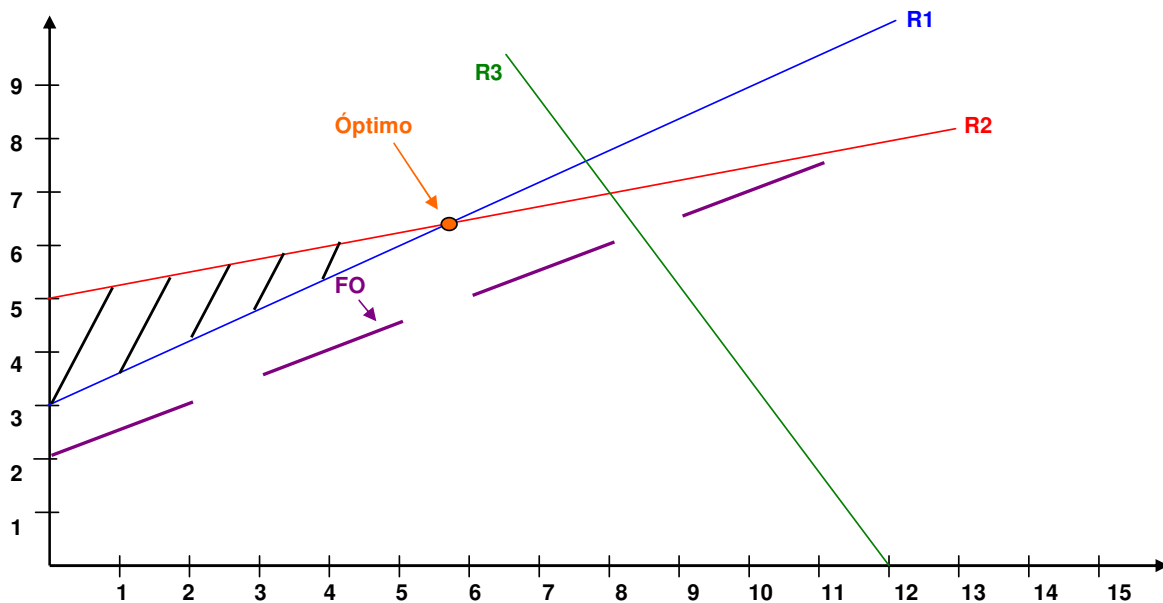
$$\Rightarrow \quad b_3 \geq 65,71 \quad \textbf{(0,5ptos.)}$$

Gráficamente esto es cuando R_3 alcanza el punto óptimo. Hasta ese punto no solo se conserva el óptimo del problema sino también el valor de la función objetivo. **(0,3ptos.)**

f) En este caso se tiene que el problema estándar queda como:

$$\begin{aligned}
 (P^*) \quad & \min \quad -2X_2 + X_1 \\
 \text{s.a.} \quad & 5X_2 - 3X_1 - X_3 = 15 \\
 & 4X_2 - X_1 + X_4 = 20 \\
 & 4X_2 + 7X_1 + X_5 = 4 \\
 & X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

Ahora la región factible cambia a:



En donde claramente se puede ver que el punto (0,0) no es factible, y por ello la base utilizada para comenzar a iterar en b) no lo es **(0,5ptos. con el gráfico)**. En este caso se debe utilizar Fase I de Simplex. Cuando se encuentra el valor óptimo de este problema (que debe ser 0), se toma aquella base óptima como la base factible inicial para comenzar a iterar. **(0,4ptos.)**

Pregunta 3

Variables: **1,5ptos. (0,8 la primera; 0,7 la segunda)**

x_{ijkl} = Toneladas de tubos i producidas en la máquina j en el mes k para demanda del mes l

$$w_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{Si la máquina } j \text{ es usada en el mes } k \text{ para producir } i \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$$

Restricciones:

Demanda: **0,6ptos.**

$$D_{is} - PD_{is} \leq \sum_{k=1}^S \sum_{j=1}^{MAQ} x_{ijks} \leq D_{is} \quad \forall i, s$$

Horas: **0,6ptos.**

$$\sum_{i=1}^{PROD} \sum_{l=k}^{CM} (hton_{ij} \cdot x_{ijkl}) + \sum_{i=1}^{PROD} h_j \cdot w_{ijk} \leq HS_{jk} \quad \forall j, k$$

Cambios: **0,5ptos.**

$$\sum_{i=1}^{PROD} w_{ijk} \leq Camb_{jk} \quad \forall j, k$$

Relación entre variables: **0,5ptos.**

$$x_{ijks} \leq D_{is} \cdot w_{ijk} \quad \forall i, j, k, s = k, \dots, CM$$

No se produce en un mes k para un mes l si k>l. **0,3ptos.**

$$x_{ijkx} = 0 \quad \forall k > l$$

Naturaleza de las variables: **0,5ptos.**

$$w_{ijk} \in \{0,1\}, x_{ijkl} \in NU\{0\} \quad \forall i, j, k, l$$

Función Objetivo: **1,5pto (1 la primera expresión; 0,5 la segunda)**

$$\max z = \sum_{i=1}^{PROD} \sum_{j=1}^{MAQ} \sum_{k=1}^{CM} \sum_{l=k}^{CM} (p_i - cp_{ij} - (l-k) porc \cdot cp_{ij}) \cdot x_{ijkl} - \sum_{i=1}^{PROD} \sum_{j=1}^{MAR} \sum_{k=1}^{CM} cc_j \cdot w_{ijk}$$

Dudas y/o Consultas
xschultz@ing.uchile.cl