



Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A - Optimización

Profs: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Aux: Leonardo López
Gonzalo Romero
Rodrigo Wolf

Control 2

09 de Mayo de 2007

Pregunta 1

1. (1 pto.) Suponga que en un problema de programación lineal ha seleccionado una matriz B de dimensión adecuada y con todas sus columnas l.i. ¿Es cierto siempre que $x = (x_B, x_R)$, con $x_B = B^{-1} \cdot b$ y $x_R = 0$, es un vértice del poliedro factible? Justifique.
2. (1 pto.) Suponga que el problema de fase I del Simplex tiene óptimo = 0. ¿Es cierto siempre que la base óptima del problema auxiliar es base primal factible para el problema original? Justifique.
3. (1 pto.) Argumente sobre la veracidad o no de la siguiente frase: “El algoritmo Simplex siempre termina con sus iteraciones cuando la solución factible básica encontrada es un óptimo”.
4. (1 pto.) Argumente sobre la veracidad o no de la siguiente frase: “Elegir la variable de entrada a la base como la de menor costo reducido asegura la mayor mejora de la función objetivo”.
5. (1 pto.) Explique el significado económico del valor óptimo de las variables duales. ¿Qué hipótesis hay que pedirle al problema primal para que este análisis tenga sentido?
6. (1 pto.) Suponga que ha resuelto un problema de programación lineal y se le avisa que un valor del vector b debe ser modificado. ¿Puede suceder que la base óptima del problema original sea factible pero no óptimo en el nuevo problema? Justifique.

Pregunta 2

Considere el siguiente problema (P):

$$\begin{aligned} \text{máx } & x_2 \\ \text{s.a. } & \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. (0,5 ptos.) Calcular el óptimo en forma gráfica.
2. (1 pto.) Escribir el problema dual y encontrar su óptimo (sin usar simplex ni análisis gráfico).
3. (1,5 ptos.) Usar simplex para chequear el óptimo primal.
4. (1 pto.) ¿En qué rango puede moverse el $C_1 = 0$ (coeficiente de x_1 en la función objetivo del problema primal) para que el óptimo siga siendo el mismo? (Usar simplex y no interpretación gráfica).
5. (1 pto.) ¿En qué rango puede moverse el $b_1 = 2$ (coeficiente del vector b en la primera restricción del problema primal) para que la base óptima siga siendo la misma? (Usar simplex y no interpretación gráfica).

6. (1 pto.) Suponga que la segunda restricción cambia a $2x_1 + x_2 \geq 4$. Observando su gráfico explicar qué pasa con el problema primal. A partir de esto último, deducir qué pasa con el problema dual (Sin cálculos ni gráficos adicionales). Justificar diciendo qué resultado teórico está utilizando.

Pregunta 3

Considere el problema de diseñar una bodega de productos heterogéneos, donde se dispone de D puertas de carga/descarga, y donde se almacenarán K tipos de productos distintos. Suponga que las dimensiones de la bodega están dadas, sin embargo debemos decidir donde guardaremos cada producto, y en cada lugar sólo un tipo de producto puede ser guardado. Por cada tipo de producto se dispone de un costo unitario de transporte $c_k : k \in K$ por unidad de distancia recorrida, y que depende de características propias del tipo de producto (que tan incómodo o pesado es de transportar). Suponga además que los productos se cargan/descargan en todas las puertas de forma uniforme. Asuma que existe un límite de altura de unidades que podemos almacenar $h_k : k \in K$, y que se conoce la cantidad total de unidades que se necesita almacenar de cada tipo de producto, cantidad que se denota como $q_k : k \in K$. Considere que cada unidad de cada producto es un pallet, todos de la misma dimensión. El objetivo de la empresa es minimizar el costo total esperado de transporte.

1. (3 ptos.) Modele el problema anteriormente descrito.
2. (1 pto.) Discuta posibles problemas/ventajas que los supuestos adicionales considerados en su modelo pueden generar en una implementación práctica del problema.
3. (1 pto.) Suponga que dos de los productos ($k_1, k_2 \in K$) pueden compartir lugar de almacenamiento, y que en ningún momento la cantidad de elementos almacenados de ambos productos será mas que $q_{k_1, k_2} < q_{k_1} + q_{k_2}$. Además considere que $h_{k_1} = h_{k_2}$. ¿Cómo cambia el modelo? ¿Cómo maneja los costos de transporte?
4. (1 pto.) Suponga que del conjunto D de puertas se deben escoger d . Modele esta nueva situación.

Indicación: Discretice la bodega en celdas o unidades de almacenamiento (i.e. considere que la bodega es una grilla).



Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A - Optimización

Profs: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Aux: Leonardo López
Gonzalo Romero
Rodrigo Wolf

Pauta Control 2

09 de Mayo de 2007

Pregunta 1

1. No siempre es cierto. Se debe verificar que $x_B = B^{-1} \cdot b \geq 0$.
2. Cuando el valor óptimo del problema de fase I es nulo puede suceder que la base óptima del problema de fase I contiene algunas columnas asociadas a variables artificiales, pues ésta es degenerada. Por lo tanto, la base óptima del problema auxiliar no es base primal factible para el problema original. Hay varias formas de poder encontrar una base primal factible en estos casos, por ejemplo, conservando las variables artificiales básicas en fase II hasta que salgan de la base o intentando eliminarlas sustituyéndolas por columnas asociadas a variables del problema original.
3. Falso. Cuando un punto verifica la condición de optimalidad siempre se cumple que este punto es óptimo, pero un óptimo no siempre se verifica la condición de optimalidad. Entonces simplex puede estar ubicado en un óptimo y sin embargo, como no se verifica la condición de optimalidad, seguir iterando. Un caso en que esto puede suceder es cuando el óptimo es una solución degenerada.
4. El criterio de entrada a la base indica que la variable no básica que entra es aquella que tiene el menor costo reducido, dentro de aquellos que son < 0 . Se ha adoptado esta convención porque trae el mayor mejoramiento local. Sin embargo al escoger esta variable de entrada se esta automáticamente determinando cual será la variable básica que saldrá de la base, y puede darse el caso que esta variable aportaba a la minimización de la función objetivo. Entonces para lograr la máxima variación habría que escoger como variable de entrada aquella que en conjunto con la variable que saldría impliquen la mayor variación en la función objetivo.
5. La variable dual y_i en el óptimo representa el valor unitario en \$ del recurso i . Se puede interpretar como cuanto estoy dispuesto a pagar por aumentar en una unidad la capacidad disponible del recurso i .

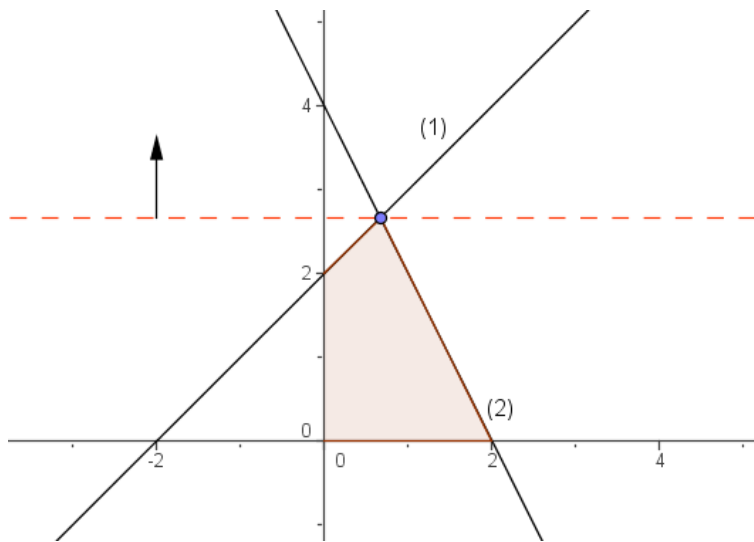
Este análisis tiene sentido sólo tiene sentido si el problema primal tiene al menos una solución óptima básica no degenerada.
6. Si la base óptima del problema original sigue siendo factible luego de la modificación (ie, se sigue verificando que $x_B = B^{-1} \cdot b \geq 0$), entonces necesariamente este punto es óptimo en el nuevo problema. Esto se debe a que la condición de optimalidad, $\bar{c}_R \geq 0$, se sigue verificando pues no se ve afectada por cambios en el vector b .

Pregunta 2

1. Gráficamente podemos concluir que el punto óptimo se encuentra en la intersección de las restricciones (1) y (2):

$$\begin{aligned}x_2 &\leq 2 + x_1 \\x_2 &\leq 4 - 2x_1\end{aligned}$$

Luego el punto óptimo es: $(x_1^*, x_2^*) = (2/3, 8/3)$. Por lo tanto el valor óptimo de la función objetivo está dado por $z^* = 8/3$.



2. El problema dual está dado por:

$$\begin{aligned}
 &\text{mín} && 2y_1 + 4y_2 \\
 &s.a. && \\
 &&& -y_1 + 2y_2 \geq 0 \\
 &&& y_1 + y_2 \geq 1 \\
 &&& y_1, y_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Usando Holgura-Complementaria:

$$\begin{aligned}
 (-x_1^* + x_2^* - 2)y_1^* &= 0 \\
 (2x_1^* + x_2^* - 4)y_2^* &= 0 \\
 (0 + y_1^* - 2y_2^*)x_1^* &= 0 \\
 (1 - y_1^* - y_2^*)x_2^* &= 0
 \end{aligned}$$

Como x_1^* y x_2^* son distintos de cero se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}
 y_1^* - 2y_2^* &= 0 \\
 1 - y_1^* - y_2^* &= 0
 \end{aligned}$$

Luego el punto óptimo es: $(y_1^*, y_2^*) = (2/3, 1/3)$. Por lo tanto el valor óptimo de la función objetivo está dado por $w^* = 8/3$, verificando $w^* = z^*$.

3. El problema debe ser transformado a su forma estándar:

$$\begin{aligned}
 &\text{mín} && -x_2 \\
 &s.a. && \\
 &&& -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
 &&& 2x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\
 &&& x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Para chequear el óptimo primal debemos verificar que se cumplan las condiciones de optimalidad de simplex. Habíamos encontrado que el óptimo se encuentra en el punto $(x_1, x_2) = (2/3, 8/3)$, por lo tanto la base debe estar conformada por las variables x_1 y x_2 .

$$B = [x_1, x_2] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Vemos que efectivamente se cumple las condiciones de factibilidad y de optimalidad:

$$x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_B^T B^{-1} R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \geq 0$$

Luego el óptimo encontrado gráficamente verifica las condiciones de optimalidad de simplex.

4. Según simplex, se debe seguir cumpliendo que: $\bar{c}_R^T = c_R^T - c_B^T B^{-1} R \geq 0$.

$$\bar{c}_R^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -c_1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2 - c_1) & \frac{1}{3}(c_1 + 1) \end{pmatrix} \geq 0$$

Entonces se debe cumplir que $c_1 \leq 2$ y $c_1 \geq -1$. Luego, para que el óptimo siga siendo el mismo $-1 \leq c_1 \leq 2$.

5. Según simplex, se debe seguir cumpliendo que: $B^{-1} \cdot b$.

$$B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}b_1 + \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3}b_1 + \frac{4}{3} \end{pmatrix} \geq 0$$

Entonces se debe cumplir que $b_1 \leq 4$ y $b_1 \geq -2$. Luego, para que el óptimo siga siendo el mismo $-2 \leq b_1 \leq 4$.

6. Si la restricción (2) es cambiada por $2x_1 + x_2 \geq 4$ es posible observar, en el gráfico, que el problema se vuelve no acotado. Luego, como resultado del teorema débil de dualidad, es posible concluir que como el problema primal es no acotado entonces el dual es infactible.

Pregunta 3

1. Podemos considerar que la bodega es una grilla en un plano con I posiciones.

1	2					
		...	i	...		
						I

Como cada unidad de cada producto es un pallet todos tienen la misma dimensión, por lo tanto es posible considerar que cada posición de la grilla tiene las dimensiones de un pallet.

Dado que se conocen los costos unitarios de transporte $c_k : k \in K$ por unidad de distancia recorrida para cada tipo de producto k , es necesario conocer la distancia existente entre cada puerta y cada posición de la bodega. Definamos el parámetro DIS_{ji} como la distancia que se debe recorrer para llevar un producto desde la puerta j a la posición i de la bodega.

Si una unidad de producto se debe almacenar en la posición i de la bodega, dado que la carga de cada tipo de producto se realiza en todas las puertas de forma uniforme, es posible considerar que el producto recorrerá la distancia promedio entre las puertas y la posición i . Definamos este parámetro como \overline{DIS}_i .

Variables de decisión

$x_{ik} : 1$ si el producto k es ubicado en la posición i de la bodega, 0 si no.

$y_{ik} : \text{número de unidades del producto } k \text{ apiladas en la posición } i.$

Función Objetivo

$$\min \sum_k \sum_i c_k \cdot \overline{DIS}_i \cdot y_{ik} \quad (1)$$

Restricciones

a) Naturaleza de las variables

$$\begin{aligned} x_{ik} &\in \{0, 1\} \quad \forall i, k \\ y_{ik} &\geq 0 \quad \forall i, k \end{aligned} \quad (2)$$

b) Limite de unidades apiladas

$$y_{ik} \leq h_k \cdot x_{ik} \quad \forall i, k \quad (3)$$

c) Demanda de cada producto por almacenamiento

$$\sum_i y_{ik} \geq q_k \quad \forall k \quad (4)$$

d) A lo más un producto por posición

$$\sum_k x_{ik} \leq 1 \quad \forall i \quad (5)$$

2. Las respuesta de esta pregunta debe estar relacionada con el modelo planteado en el punto anterior, los supuestos y parámetros adicionales definidos.

El modelar la bodega como una grilla con celdas todas del mismo tamaño tiene sentido práctico, ya que es común la utilización de unidades logísticas de transporte y almacenamiento como los pallets. Uno de los problemas que puede generar el modelo, por ejemplo, es que no considera la accesibilidad a cada posición. Es decir, en una implementación práctica debe considerarse la existencia de pasillos dentro del layout de la bodega. Acceder a todas las posiciones no tiene la misma dificultad pues depende de que tan accesible está una posición desde el pasillo, si está obstaculizado por otra posición llena de productos, etc. Otro problema del modelo es que sólo considera los costos de transporte por ingresar los productos. En una aplicación real es necesario considerar los costos de sacar un producto de la bodega, los cuales dependen necesariamente de la rotación esperada de cada tipo de producto, de forma de escoger posiciones más cercanas a las puertas para los productos con mayor rotación dentro de la bodega.

En definitiva, se busca que el alumno evalúe la aplicabilidad de este modelo en la realidad y que identifique posibles ventajas y/o problemas con los que se podría encontrar.

3. Es posible definir un nuevo producto $k^* = k_1 \cup k_2$, del cual deben ser almacenadas q_{k_1, k_2} unidades. Este producto reemplaza los productos k_1 y k_2 por separados, por lo tanto basta con modificar la instancia original para que el modelo anterior resuelva esta nueva situación. Entonces tendremos que:

$$\begin{aligned} q_{k^*} &= q_{k_1, k_2} \\ h_{k^*} &= h_{k_1} = h_{k_2} \\ K &= K \cup \{k^*\} \setminus \{k_1, k_2\} \end{aligned}$$

Hay que decidir como manejar los costos de transporte del nuevo producto. Naturalmente el costo de transporte de k^* debería estar entre los costos de k_1 y k_2 , por lo que cualquier aproximación en este sentido es válida. Por ejemplo, definiéndolo como el promedio de costos de cada producto o como un promedio ponderado por la cantidad de elementos almacenados de cada producto por separado:

$$c_{k^*} = \frac{c_{k_1} + c_{k_2}}{2} \quad \text{o} \quad c_{k^*} = \frac{q_{k_1} \cdot c_{k_1} + q_{k_2} \cdot c_{k_2}}{q_{k_1} + q_{k_2}}$$

4. En este caso necesariamente debemos identificar la distancia que se debe recorrer para llevar un producto desde la puerta j a la posición i de la bodega, DIS_{ji} . Se deben redefinir las variables de decisión, función objetivo y restricciones.

con estas consideraciones, el modelo anterior se aplica a esta nueva situación. Notar que la redefinición del conjunto de tipos de productos ($K = K \cup \{k^*\} \setminus \{k_1, k_2\}$) puede realizarse para cada restricción que involucre un $\forall k$.

Variables de decisión

x_{ik} : 1 si el producto k es ubicado en la posición i de la bodega, 0 si no.

y_{ijk} : número de unidades del producto k ingresadas por la puerta j apiladas en la posición i .

w_j : 1 si se escoge la puerta j , 0 si no.

Función Objetivo

$$\min \sum_k \sum_j \sum_i c_k \cdot DIS_{ji} \cdot y_{ijk} \quad (6)$$

Restricciones

a) Naturaleza de las variables

$$\begin{aligned} x_{ik} &\in \{0, 1\} \quad \forall i, k \\ w_j &\in \{0, 1\} \quad \forall j \in D \\ y_{ijk} &\geq 0 \quad \forall i, k \end{aligned} \quad (7)$$

b) Limite de unidades apiladas

$$\sum_j y_{ijk} \leq h_k \cdot x_{ik} \quad \forall i, k \quad (8)$$

c) Demanda de cada producto por almacenamiento

$$\sum_j \sum_i y_{ijk} \geq \frac{q_k}{d} \quad \forall k \quad (9)$$

d) A lo más un producto por posición

$$\sum_k x_{ik} \leq 1 \quad \forall i \quad (10)$$

e) Número de puertas escogidas

$$\sum_j w_j = d \quad (11)$$

f) No es posible ingresar productos por puertas no escogidas y no se pueden ingresar más productos que los existentes por una misma puerta

$$\sum_i y_{ijk} \leq q_k \cdot w_j \quad (12)$$

Nota: Es correcto que la primera parte del problema se haya modelado considerando los flujos entre cada puerta y cada posición de la bodega. En ese caso, se debe haber planteado el modelo descrito en el punto 4 sin considerar la variable de decisión w_j y las restricciones asociadas. En este caso, en el punto 4 bastaba agregar la variable de decisión w_j y las restricciones asociadas.

Dudas y/o consultas
Leonardo López H.
lelopez@ing.uchile.cl