



Universidad de Chile  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A: Optimización  
Profs: P. Conca, G. Duran, D. Sauré  
Aux : B. Duarte, F. Cisternas, S. Souyris  
J. Muñoz, M. Quinteros, G. Medina

## Control 2

Miercoles 15 de Octubre, 2003

### Problema 1

1. (1,5 puntos) Un alumno de IN34A ha sido contratado para modelar la producción de bicicletas y triciclos de la empresa El Ciclón. Se sabe que para producirlos se necesitan ruedas, asientos y pintura. Un triciclo necesita 3 ruedas, 1 asiento y 1 litro de pintura, mientras que la bicicleta necesita 2 ruedas, 1 asiento y 2 litros de pintura. El precio de las bicicletas y de los triciclos en el mercado es 3 u.m. y 1 u.m. respectivamente y la disposición en bodega de ruedas, asientos y litros de pinturas es de 100, 60, 50 respectivamente. El alumno ha construido el siguiente modelo de programación lineal para resolver el problema:

$$\begin{aligned} \text{máx } z &= 3 \cdot x_1 + x_2 \\ \text{s.a. } 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 &\leq 100 \\ x_1 + x_2 &\leq 60 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 &\leq 50 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Explique 2 supuestos o aproximaciones que el alumno haya realizado en su modelo.

2. (1,5 puntos) Demuestre analíticamente que un punto interior del espacio de soluciones factibles no puede ser solución óptima de un problema de programación lineal con función objetivo cuyos coeficientes no sean todos nulos.
3. (1,5 puntos) Explique como el algoritmo simplex asegura no salirse del espacio de soluciones factibles al efectuar una iteración.
4. (1,5 puntos) Señale si el algoritmo simplex asegura en cada iteración la máxima variación posible de la función objetivo. ¿Por qué?. Si no lo asegura, explique como se podría lograr la máxima variación.

### Problema 2

Escoja 2 de las siguientes 3 preguntas. En caso de responder las 3 se considerarán las 2 peores.

1.
  - a) (1,5 puntos) Genere un PL no acotado con al menos 2 variables (no necesariamente escrito en forma estandar). Grafique la situación.
  - b) (1,5 puntos) Escríbalo en forma estándar y aplique el algoritmo simplex. ¿Como detecta el algoritmo la situación de no acotamiento de la función objetivo?
2.
  - a) (1,5 puntos) Genere un PL con al menos 2 variables que tenga múltiples óptimos (no necesariamente escrito en forma estandar). Grafique la situación.

- b) (1,5 puntos) Escribalo en forma estándar y aplique el algoritmo simplex. ¿Como detecta el algoritmo que existe más de un punto óptimo?
3. a) (1,5 puntos) Genere un PL con al menos 2 variables cuyo óptimo sea degenerado (no necesariamente escrito en forma estandar). Grafique la situación.
- b) (1,5 puntos) Escribalo en forma estándar y aplique el algoritmo simplex. ¿Como detecta el algoritmo la situación de degeneramiento?

### Problema 3

Armijo Catalán ha tomado la decisión más importante de su vida y ha decidido casarse, para lo cual está planificando la celebración del matrimonio. Armijo tiene en mente  $N$  posibles invitados y el centro de eventos donde se realizará la celebración le ha propuesto  $M$  posibles menús. Con este fin Armijo debe seleccionar el menú a servir en la fiesta, considerando que el mismo menú será servido a cada uno de sus invitados y que el costo de cada cena servida del menú  $m$  es  $PM_m$  [U.M.]. Si el menú seleccionado es el  $m$ , la persona  $i$ , en caso de ser invitada, consumirá  $VB_{im}$  litros de vino blanco y  $VT_{im}$  litros de vino tinto. Se sabe que el litro de vino blanco y el de vino tinto cuestan  $PVB$  y  $PVT$  respectivamente. Adicionalmente Armijo cuenta con una reserva de  $RVB$  litros de vino blanco y  $RVT$  litros de vino tinto, sobrantes de sus anteriores matrimonios.

La feliz pareja de novios cuenta con un presupuesto de  $PPTO$  [U.M.] destinadas a la realización de la fiesta de matrimonio. Al momento de decidir a quienes invitar Armijo debe considerar los siguientes aspectos.

- Una persona que recibe una invitación asistirá con seguridad a la fiesta.
- En el caso de invitar a la persona  $i$  de la lista de posibles invitados, no será posible invitar a ninguna de sus antiguas parejas, con las cuales se mantienen diferencias irreconciliables. Este conjunto esta dado por  $E_i$ .
- En el caso de invitar a la persona  $i$  de la lista de posibles invitados, se deberá invitar forzosamente a cada una de las personas que el invitado  $i$  considera como mejores amigos. Este conjunto esta dado por  $A_i$ .
- Dentro de la lista de posibles invitados existe un conjunto de  $H$  matrimonios, razón por la cual en el caso de extender una invitación a una persona casada, obligatoriamente la invitación debe ser extendida a su cónyuge. Considere que el matrimonio  $h$  esta formado por las personas  $h_1$  y  $h_2$  de la lista de invitados (las  $2 \cdot H$  personas casadas están incluidas en la lista de potenciales invitados).

Tomando en cuenta todas estas consideraciones, Armijo le ha pedido a usted que formule un modelo de programación lineal con variables mixtas que lo ayude a seleccionar el menú a servir en la fiesta y que le indique a qué personas se les debe enviar una invitación. Para esto considere que Armijo desea invitar a tanta gente como sea posible, de forma de no gastar más dinero del que tiene presupuestado.



## Solución Control 2

Lunes 13 de Octubre, 2003

### Problema 1

1. Supuestos realizados en el modelo:

- Es posible hacer fracciones de producto, esto porque sobre la naturaleza de las variables solo se impone que sean  $\geq 0$
- Por la misma razón, es posible utilizar fracciones de insumo.
- Se dispone de todos los otros insumos extras necesarios para fabricar cada producto sin restricción. Por ejemplo se dispone de muchos marcos de bicicletas. En rigor hay que tener como mínimo 25 de cada insumo extra de bicicleta (por restricción 3) y 30 de cada insumo extra de triciclo (por restricción 2)
- Puede vender todo lo que produce.
- No hay costos fijos de producción. Para comenzar a producir cualquiera de los productos no es necesario incurrir en costos de inversión inicial.
- El productor es tomador de precios, es decir no influye en los precios de mercado. El precio no es función de la cantidad producida.
- Pueden existir otros supuestos debidamente fundamentados.

2. Un punto interior del espacio de soluciones factibles no puede ser solución óptima de un problema de programación lineal con función objetivo cuyos coeficientes no sean todos nulos es lo mismo que si el PL admite solución óptima finita, entonces el valor óptimo se alcanza en un punto extremo del espacio de soluciones factibles. Demostraremos entonces la segunda afirmación.

Es necesario que los coeficientes no sean todos nulos, porque en el caso que si lo sean cualquier punto del espacio factible es óptimo, ya que la solución óptima siempre es igual a 0.

Si el problema lineal tiene solución óptima finita, entonces  $c^T y \geq 0, \forall y \in \text{car}(K) = \{y : \exists x \in K \text{ tal que } x + \lambda y \in K, \forall \lambda \geq 0\}$  (condición KKT).

Entonces sea  $x^* \in K$  solución óptima del problema. Por lo tanto se tiene que:

$$x^* = \sum_{i=1}^p \lambda_i x^i + \sum_j \mu_j y^j \text{ con } \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, \mu_j \geq 0$$

para  $x^i, i = 1, \dots, p$  puntos extremos de  $K$  e  $y^j \in \text{car}(K)$

Supongamos que la afirmación no es cierta. Entonces  $c^T x^i > c^T x^* = z^*, \forall i = 1, \dots, p$ . Por lo tanto,

$$z^* = \sum_{i=1}^p \lambda_i c^T x^i + \sum_j \mu_j c^T y^j \geq \sum_{i=1}^p \lambda_i c^T x^i > \sum_{i=1}^p \lambda_i z^* = z^*$$

Una contradicción. Se concluye que  $c^T x^i = z^*$  para al menos un punto extremo  $x^i$  de  $K$ . Entonces un punto interior no puede ser solución de un PL.

3. El Algoritmo simplex asegura no salirse del espacio de soluciones factibles al efectuar cada iteración respetando el criterio de entrada a la base.

En efecto, si se tiene que la variable que entra a la base es  $x_s$ , para saber cual es la variable que sale de la base es necesario determinar cual es la variable que primero se anula cuando  $x_s$  crece, para no salirse del espacio factible. Esto es buscar la primera variable que se anula en cada una de las restricciones del problema en su forma canónica:

$$x_i + \bar{a}_{is}x_s = \bar{b}_i \quad i = 1, \dots, m$$

Tomando en consideración las  $m$  restricciones el máximo valor que puede tomar  $x_s$  es

$$\min_{\bar{a}_{is} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right\}$$

4. El criterio de entrada a la base indica que la variable no básica que entra es aquella que tiene el menor costo reducido, dentro de aquellos que son  $< 0$ . Se ha adoptado esta convención porque trae el mayor mejoramiento local. Sin embargo al escoger esta variable de entrada se esta automáticamente determinando cual será la variable básica que saldrá de la base, y puede darse el caso que esta variable aportaba a la minimización de la función objetivo. Entonces para lograr la máxima variación habría que escoger como variable de entrada aquella que en conjunto con la variable que saldría impliquen la mayor variación en la función objetivo. Para esto es necesario probar todos los casos.

## Problema 2

Es importante notar que cada alumno es libre de dar cualquier ejemplo. Los siguientes son un ejemplo del desarrollo esperado.

- 1.

$$(P) \quad \text{máx } z = 2x_1 + x_2$$

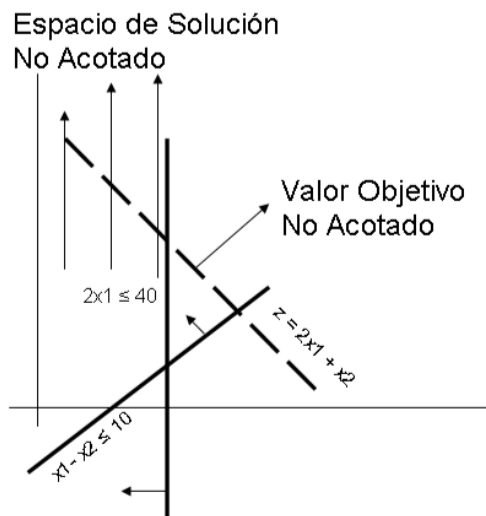
s.a.

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & \leq & 10 \\ 2x_1 & \leq & 40 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Iteración Inicial

<i>SolFactible</i>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	<i>Sol</i>
$z$	-2	<b>-1</b>	0	0	0
$x_3$	1	<b>-1</b>	1	0	10
$x_4$	2	<b>0</b>	0	-1	40

La solución no acotada es descubierta por simplex observando los coeficientes en las restricciones de la variable que entra a la base, o eventualmente los coeficientes de alguna variable con costo reducido menor que cero pero que no entre a la base. Basta que estos coeficientes sean no positivos, lo que implica que la variable se puede incrementar (o disminuir) indefinidamente sin violar ninguna de las restricciones. En este caso, el valor de  $x_2$  puede ser aumentado indefinidamente y así se incrementaría indefinidamente también el valor de  $z$ . Para ver que ello es así, basta chequear que los coeficientes asociados a  $x_2$  en las restricciones son no positivos (negativos o cero).



2.

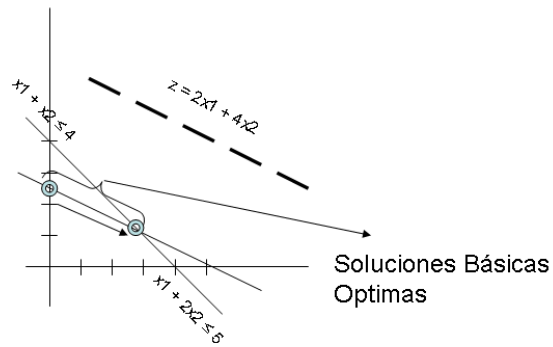
$$(P) \quad \text{máx } z = 2x_1 + 4x_2$$

s.a.

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Iteracion	SolBasFact	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	Sol
0	$z$	-2	-4	0	0	0
Entrar $x_2$	$x_3$	1	2	1	0	5
Salir $x_3$	$x_4$	1	1	0	1	4
1(optimo)	$z$	0	0	2	0	10
Entrar $x_1$	$x_2$	1/2	1	1/2	0	5/2
Salir $x_4$	$x_4$	1/2	0	-1/2	1	3/2
2	$z$	0	0	2	0	10
Optimos	$x_2$	0	1	1	-1	1
Alternativos	$x_1$	1	0	-1	2	3

Las soluciones alternativas son descubiertas por simplex si se observan los coeficientes de las variables no básicas en la ecuación  $-z$  de alguna iteración. En este caso, en la iteración 1, el coeficiente de  $x_1$  no básica es cero, indicando que  $x_1$  puede entrar en la solución básica sin cambiar el valor de  $z$ , pero causando un cambio en los valores de las variables.

3.

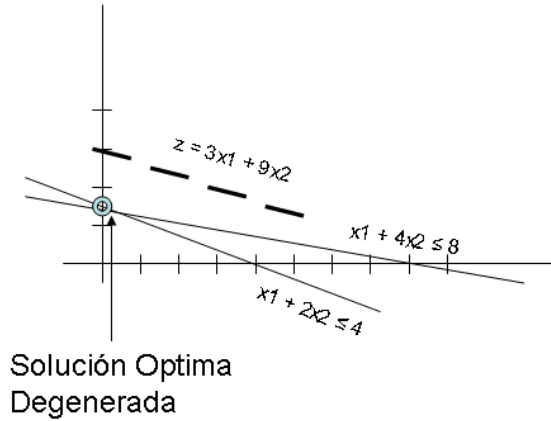
$$(P) \quad \text{máx } z = 3x_1 + 9x_2$$

s.a.

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Iteraci'on	SolBasFact	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	Sol
	0	$z$	-3	-9	0	0
Entrax <sub>2</sub>	$x_3$	1	4	1	0	8
Salex <sub>3</sub>	$x_4$	1	2	0	1	4
1	$z$	-3/4	0	9/4	0	18
Entrax <sub>1</sub>	$x_2$	1/4	1	1/4	0	2
Salex <sub>4</sub>	$x_4$	1/2	0	-1/2	1	0
2	$z$	0	0	3/2	3/2	18
Optimo	$x_2$	0	1	1/2	-1/2	2
	$x_1$	1	0	-1	2	0

La situación de degeneramiento es descubierta por simplex en el criterio de salida de la base. Hay variables que empatan en el criterio de salida de la base. En este caso, en la iteración inicial,  $x_3$  y  $x_4$  empatan para la variable de salida. Por esta razón, la variable básica  $x_4$  tiene un valor 0 en la iteración 1 y, por lo tanto, da por resultado una solución básica degenerada.

### Problema 3

- Variables de decisión:

$$\begin{aligned} Z_{im} &= \begin{cases} 1 & \text{si la persona } i \text{ es invitada al matrimonio cuando se escoge el menu } m \\ 0 & \sim \end{cases} \\ W_m &= \begin{cases} 1 & \text{si se escoge el menu } m \\ 0 & \sim \end{cases} \\ XT &= \text{Litros de vino tinto a comprar} \\ XB &= \text{Litros de vino blanco a comprar} \end{aligned}$$

- Parámetros

$$\begin{aligned} PM_m &: \text{Precio unitario de la cena menu } m \\ VB_{im} &: \text{Cantidad de vino blanco que consume el invitado } i \text{ con el menu } m \\ VT_{im} &: \text{Cantidad de vino tinto que consume el invitado } i \text{ con el menu } m \\ RVB &: \text{Disponibilidad inicial de vino blanco} \\ RVT &: \text{Disponibilidad inicial de vino tinto} \\ PVB &: \text{Precio litro de vino blanco} \\ PVT &: \text{Precio litro de vino tinto} \\ PPto &: \text{Presupuesto de la fiesta} \\ E_i &: \text{Conjunto de ex-parejas de } i \\ A_i &: \text{Conjunto de amigos de } i \\ (h_1, h_2) &: \text{Personas del matrimonio } h \end{aligned}$$

- Restricciones

1. Solo se escoge un menu

$$\sum_{m=1}^M W_m = 1$$

2. Solo invito bajo el menu escogido

$$Z_{im} \leq W_m \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

3. Compro vino solo si me falta

$$XT \geq \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M Z_{im} \cdot VT_{im} \right] - RVT$$

$$XB \geq \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M Z_{im} \cdot VB_{im} \right] - RVB$$

4. No sobrepasar el presupuesto

$$\left[ \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M Z_{im} \cdot PM_m \right] + XT \cdot PVT + XB \cdot PVB \leq PPto$$

5. Si invito a persona  $i$  no invito a sus ex-parejas

$$Z_{jm} \leq (1 - Z_{im}) \quad \forall j \in E_i \quad \forall m \quad \forall i$$

6. Si invito a persona  $i$  debo invitar a sus amigos

$$Z_{im} \leq Z_{jm} \quad \forall j \in A_i \quad \forall m \quad \forall i$$

7. Si va un casado, va su pareja

$$Z_{h_1m} = Z_{h_2m} \quad \forall h \in \{1, \dots, H\} \quad \forall m$$

8. Naturaleza de las variables

$$Z_{im}, W_m \in \{0, 1\}$$

$$XT, XB \geq 0$$

- Función objetivo

$$\text{máx } z = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M Z_{im}$$