



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A: Optimización
Profesor: Guillermo Durán
Auxiliar: Giovanni Medina

Control 2

Miércoles 12 de Mayo, 2004

Problema 1

1. (2 puntos) Sea el PL escrito en forma estándar:

$$\begin{array}{ll} \text{(PL) mín} & z = c^T x \\ \text{s.a.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Con $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $c \in R^n$, $x \in R^n$ y $n \geq m$.

- (0,5 ptos) Describa que es una solución básica. Qué propiedades tiene?
 - (0,5 ptos) Cuál es el número máximo de soluciones básicas que puede tener el PL? Puede darse que ese número máximo no se alcance? Por qué?
 - (1 pto) Describa qué es una solución factible básica? Qué propiedades tiene? Por qué el algoritmo SIMPLEX puede trabajar solo con soluciones factibles básicas?
2. (1,5 ptos) Dado el PL en forma estándar:

$$\begin{array}{ll} \text{(PL) mín} & z = c^T x \\ \text{s.a.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

- (0,5 ptos) Defina el problema auxiliar (P1) utilizado en la Fase I del Simplex.
 - (1 pto) Demuestre que el (PL) tiene solución factible si y solo si el problema (P1) tiene valor óptimo 0.
3. (1 punto)
- (0,5 ptos) Es el problema de programación lineal un problema polinomial? Justifique.
 - (0,5 ptos) Es el Simplex un algoritmo polinomial? Justifique.
4. (1,5 ptos) Sea el problema primal (A)

$$\begin{array}{ll} \text{(A) máx} & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.a.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{array}$$

- (0,2 ptos) Escribir su respectivo problema dual.
- (1 pto) Probar que si el primal es no acotado entonces el dual es infactible.
- (0,3 ptos.) Es cierta la recíproca de b)? Justifique.

Problema 2

Giusseppe Mandinga ahora debe transportar a los invitados a su asado, para lo cual ha decidido contratar un bus. Giusseppe cuenta con P posibles paraderos del bus y debe establecer cuales de estos paraderos visitará el bus. Dado lo lejano que está ubicada la casa de Giusseppe, un invitado no podrá llegar al asado si el bus no pasa por su paradero. Si el bus decide parar en el paradero p una cantidad D_p de invitados se subirá al bus (no pueden subir solo algunos) y Giusseppe quiere tener por lo menos una cantidad I de invitados en su asado.

Por otra parte, Don Willy, su jefe directo, exige que el bus pase por su paradero para poder asistir y exige una distribución relativamente equitativa de los paraderos, para esto se ha dividido el territorio en 4 zonas (norte, sur, este y oeste), sabiendo que los paraderos de la zona t pertenecen al conjunto Z_t y se ha exigido que si en cada zona t se ha decidido visitar un número n de paraderos en las otras zonas no puedan visitarse más del doble ni menos de la mitad de paraderos.

Se sabe que el bus contratado por Giusseppe solo hará viajes ida y vuelta desde su casa a un paradero escogido, y así para todos los paraderos escogidos.

Además, Giusseppe cuenta con un monto de dinero DIN que es lo máximo que se puede gastar en gasolina para el bus. Se sabe que el bus gasta L litros de gasolina por kilometro, que el precio de la gasolina es de GAS pesos por litro y que la distancia de la casa de Giusseppe al paradero p es d_p kilometros.

Finalmente, Giusseppe busca minimizar el costo de arriendo del bus el cual es directamente proporcional al número de personas que es capaz de transportar, por lo que Giusseppe busca en realidad minimizar la capacidad máxima de personas que puede llevar el bus, pero cumpliendo las restricciones expuestas anteriormente.

Ayude a Giusseppe a resolver el problema anterior, modelando el problema como un problema de programación lineal entera.

Problema 3

Sea el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{máx } z = & c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 \leq b_1 \\ & x_1 - x_2 \leq b_2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Con $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $b_1 = 6$ y $b_2 = 2$.

1. (0,5 ptos) Calcular el óptimo de manera gráfica.
2. (1,5 ptos) Aplicar el algoritmo SIMPLEX para encontrar el óptimo. Justifique todos los pasos que realiza.
3. (1 pto) En qué intervalo puede moverse c_1 para que el punto óptimo siga siendo el mismo? Justifique.
4. (1 pto) En qué intervalo puede moverse b_1 para que la base óptima siga siendo la misma? Justifique.
5. (0,2 ptos) Formule el problema dual del problema original.
6. (1 pto) Encuentre el óptimo del dual usando el Teorema de Holgura Complementaria.
7. (0,4 ptos) Suponga que b_1 aumenta de 6 a 6,5, en cuánto mejora la función objetivo? Justifique sin realizar ningún calculo adicional.
8. (0,4 ptos) Suponga que b_2 aumenta de 2 a 3, en cuánto mejora la función objetivo? Justifique sin realizar ningún calculo adicional.

Pauta

Problema 1

1. .

- a) Una solución básica x se escribe como $x = (x_B, x_R)$ con $x_B = B^{-1}b$ y $x_R = 0$, donde B es una submatriz de $m \times m$ de A , con m columnas linealmente independientes. Su propiedad fundamental es que verifica el sistema $Ax = b$.
- b) El número de soluciones básicas que puede tener un PL es $\binom{n}{m}$. Ese número podría no alcanzarse por ejemplo si existen subconjuntos de m columnas de A que no son linealmente independientes.
- c) Una solución factible básica es una solución básica que verifica $x_B \geq 0$. Su propiedad fundamental es que es un punto extremo (o vértice) del conjunto de soluciones factibles. El algoritmo SIMPLEX puede orientarse solo a estas soluciones porque sabemos que algún vértice es óptimo del problema (si existe óptimo).

2. .

a)

$$\begin{aligned} (P_1) \quad \min w &= \sum_{i=1}^m t_i \\ \text{s.a.} \quad Ax + It &= b, b \geq 0 \\ x, t &\geq 0 \end{aligned}$$

- b) \Rightarrow Si el (PL) admite solución factible, se construye una solución factible para (P_1) asignando valor 0 a las variables artificiales.
Como $w^* \geq 0$ (todos los $t_i \geq 0$) y esta solución factible tiene un valor $w = 0$, entonces es óptima para P_1 .

\Leftarrow Si $w^* = 0 \Rightarrow$ existe una solución factible para (P_1) (\bar{x}, \bar{t}) tal que $t_i = 0 \quad \forall i$.
Luego \bar{x} es solución factible del (PL).

3. .

- a) Si, lo es. Porque existen algoritmos polinomiales que lo resuelven, como Kachiyari o Karmarkar.
- b) No, porque en peor caso tiene complejidad exponencial.

4. .

a)

$$\begin{aligned} (B) \quad \min \quad & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad j = 1, \dots, n \\ & y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

- b) Por el teorema débil de dualidad se tiene que $\sum_i c_i x_i \leq \sum_j b_j * y_j$, así se deduce que si el dual es factible entonces tengo una cota superior para el primal.
- c) No, no es cierta. Existen problemas con primal y dual infactibles.

Problema 2

Seguimos los pasos típicos:

1. Variables de Decisión:

$$X_p = \begin{cases} 1 & \text{Sí se visita el paradero } p \text{ (1,0 puntos)} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Y = Número máximo de personas que puede transportar el bus (1,0 puntos)

2. Restricciones:

a) Cantidad mínima de invitados (0,5 puntos)

$$\sum_{p=1}^P X_p D_p \geq I$$

b) El bus debe pasar por donde Don Willy (0,5 puntos)

$X_1 = 1$, suponiendo que $p = 1$ corresponde al paradero de Don Willy

c) Distribución equitativa de paraderos (1,0 punto)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{q \in Z_s} X_q &\leq \sum_{p \in Z_t} X_p \quad \forall s = 1, 2, 3, 4 \quad \forall t \neq s \\ \sum_{p \in Z_t} X_p &\leq 2 \sum_{q \in Z_s} X_q \quad \forall s = 1, 2, 3, 4 \quad \forall t \neq s \end{aligned}$$

d) Presupuesto para gasolina (0,5 puntos)

$$\sum_{p=1}^P X_p \cdot L \cdot 2d_p \cdot GAS \leq DIN$$

e) La capacidad de personas del bus debe ser suficiente (0,5 puntos)

$$Y \geq X_p D_p \quad \forall p = 1, \dots, P$$

f) Naturaleza de las variables (0,5 puntos)

$$X_p \in \{0, 1\} \quad \forall p$$

$Y \in \mathbb{N}$ (puede también colocarse $Y \geq 0$ si se asume Y continua)

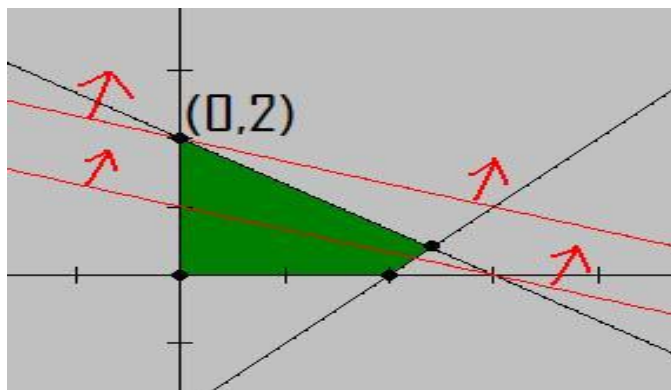
3. Función Objetivo: (0,5 puntos)

$$\text{mín } Y$$

Nota de Corrección: La restricción de distribución equitativa de paraderos se puede escribir como solo una de las 2 restricciones, ya que ambas dicen lo mismo, lo cual amerita puntaje completo.

Problema 3

1. El gráfico queda:



El óptimo se encuentra en el punto (0,2)

2. El problema en forma estandar queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{mín } \tilde{z} &= -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a. } 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Luego se puede comenzar a iterar con la base canónica o partir desde el óptimo de forma inmediata.

▪ **Opción 1:**

Como las variables x_3 y x_4 forman una base factible, se puede comenzar a iterar con la base canónica. Luego empezamos a iterar de la siguiente forma:

Iteración 1:

Variables Básicas: x_3, x_4

Variables No Básicas: x_1, x_2

Luego:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

Criterio de Optimalidad:

Vemos los costos reducidos:

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_B^T B^{-1} R$$

Luego:

$$\begin{aligned} \bar{c}_R^T &= (-1, -3) - (0, 0) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \bar{c}_R^T &= (-1, -3) \end{aligned}$$

Así la solución no es óptima, por lo que se debe iterar.

Criterio de Entrada:

$$\min_{\bar{c}_R < 0} \{\bar{c}_R\} = \min\{-1, -3\} = -3 \Rightarrow \text{entra } x_2$$

Criterio de Salida:

$$\min_{\bar{a}_{is} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right\}$$

Donde:

$$\bar{b}_i = B^{-1}b = (6, 2)$$

$$\bar{a}_{is} = B^{-1}a_{is} = (3, -1)$$

Luego:

$$\min_{\bar{a}_{is} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right\} = \min \left\{ \frac{6}{3} \right\} = 2 \Rightarrow \text{sale } x_3$$

Iteración 2:

Variables Básicas: x_2, x_4

Variables No Básicas: x_1, x_3

Luego:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Criterio de Optimalidad:

Vemos los costos reducidos:

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_B^T B^{-1}R$$

Luego:

$$\bar{c}_R^T = (-1, 0) - (-3, 0) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = (-1, 0) - (-1, 0) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = (1, 1)$$

Así la solución es óptima, por lo que se deja de iterar.

Veamos el valor de las variables:

$$\bar{b}_i = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = (2, 4) = (x_2, x_4)$$

Y como x_1 y x_3 son variables no básicas, $x_1 = x_3 = 0$.

Luego, la solución óptima es:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = 4$$

$$\tilde{z} = -6$$

Que verifica la solución gráfica encontrada anteriormente.

■ **Opción 2:**

Inteligentemente se puede partir desde el óptimo, sabiendo que en éste la primera restricción es activa, por lo que $x_3 = 0$ y además ya se sabe que $x_1 = 0$, por lo que la variables no básicas serían x_1, x_3 .

Luego se comienza a iterar:

Iteración 1:

Variables Básicas: x_2, x_4

Variables No Básicas: x_1, x_3

Luego:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Criterio de Optimalidad:

Vemos los costos reducidos:

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_B^T B^{-1} R$$

Luego:

$$\bar{c}_R^T = (-1, 0) - (-3, 0) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = (-1, 0) - (-1, 0) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = (1, 1)$$

Así la solución es óptima, por lo que se deja de iterar.

Veamos el valor de las variables:

$$\bar{b}_i = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = (2, 4) = (x_2, x_4)$$

Y como x_1 y x_3 son variables no básicas, $x_1 = x_3 = 0$.

Luego, la solución óptima es:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = 4$$

$$\tilde{z} = -6$$

Que verifica la solución gráfica encontrada anteriormente.

3. Variar c_1 significa variar la pendiente de la función objetivo. Así c_1 puede variar hasta que la función objetivo se haga paralela a la primera restricción o a la restricción $x_1 \geq 0$.

Para hacerse paralela a la primera restricción c_1 debe ser igual a 2.

Para hacerse paralela a la restricción $x_1 \geq 0$ c_1 debe variar hasta $-\infty$

Así la variación de c_1 puede ser en el intervalo $(-\infty, 2]$ sin que el óptimo varíe.

4. Variar b_1 significa mover la primera restricción en forma paralela. Así para que varíe la base óptima debe encontrarse un nuevo óptimo en el cual la primera restricción deje de ser activa o x_1 deje de ser 0 o el problema se haga infactible (ya que en un problema infactible no hay base óptima).

Luego, si se comienza a variar b_1 en el óptimo factible siempre x_1 se hace 0 y la primera restricción es activa, por lo que para que cambie la base óptima el problema se debe hacer infactible.

El problema se hace infactible cuando $b_1 < 0$, por lo tanto la base óptima se mantiene en el intervalo $[0, \infty)$.

5.

$$\begin{aligned} \text{mín } w &= 6y_1 + 2y_2 \\ \text{s.a. } 2y_1 + y_2 &\geq 1 \\ 3y_1 - y_2 &\geq 3 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

6. El teorema de Holgura Complementaria dice que se cumple las siguientes 2 ecuaciones en el óptimo:

$$(A_i x^* - b_i) \cdot y_i^* = 0$$

$$x_j^* \cdot (A_j^T y^* - c_j) = 0$$

Luego, se sabe que $x_4 \neq 0 \Rightarrow$ segunda restricción del primal es no activa $\Rightarrow y_2 = 0$.

Por otra parte $x_2 = 2 \neq 0 \Rightarrow 3y_1 - y_2 = 3$ con $y_2 = 0$. Luego $y_1 = 1$

Luego el óptimo del dual es:

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = 0$$

$$w = 6$$

7. El valor de las variables duales se interpreta económicamente como el beneficio extra que se obtiene al aumentar en 1 algún valor del vector b (aporte marginal). Así para ver el mejoramiento en la función objetivo al aumentar el valor de b_1 en menos de 1, basta con multiplicar el aumento por el valor de la variable dual:

$$\text{aumento en } z = (6, 5 - 6) \cdot 1 = 0, 5$$

Por lo tanto la función objetivo mejora en 0,5.

8. Por lo mismo del punto anterior, tenemos:

$$\text{aumento en } z = (3 - 2) \cdot 0 = 0$$

Por lo tanto la función objetivo no mejora.

Dudas y/o Consultas:
Giovanni Medina Reyes
gmedina@ing.uchile.cl