



Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A - Optimización

Profs: Francisco Cisternas, Richard Weber
Auxs: Andre Carboni, Leonardo López
Gonzalo Romero, Rodrigo Wolf

Control 2 3 de Octubre, 2007

Pregunta 1:

1. (1 pto.) Si para un problema de optimización lineal se tiene un candidato a óptimo, que al menos es óptimo local. ¿Qué condiciones adicionales debe cumplir esta solución para ser óptimo global? Justifique claramente su respuesta.
2. (1 pto.) ¿Es posible encontrar un problema lineal infactible y que su dual también sea infactible? En caso afirmativo encuentre un ejemplo. En caso negativo demuestre por contradicción.
3. (1 pto.) Si S es el espacio de soluciones factibles de un problema, y el cono característico de S ($\text{car}(S)$) es no vacío. Asumiendo que se conocen todos los puntos extremos de S (llamémoslos X_i) y todas las direcciones extremas (llamémoslas Y_j), ¿cómo puede ser representado un vector x , perteneciente a este espacio de soluciones factibles? Explique por qué no puede ser representado como en el caso en que $\text{car}(S)$ es vacío.
4. (1 pto.) Comente las siguientes afirmaciones:
 - a. En un problema de optimización lineal, utilizando el algoritmo simplex, siempre es posible alcanzar al menos 1 solución óptima al problema.
 - b. Si un problema lineal tiene solución (finita) entonces el valor óptimo se alcanza exclusivamente en un punto extremo del poliedro factible.
 - c. En la fase II del algoritmo simplex, es posible asegurar que siempre se estará en el espacio de soluciones factibles de un problema.
5. (1 pto.) Se tiene el siguiente poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$ con $A \in M_{m,n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Suponga que conoce un vértice $v \in P$ y su respectiva base $B_v \in M_{m,m}$. Explique cómo haría para obtener todos los vértices adyacentes a v dentro del poliedro P . (puede utilizar un pseudo algoritmo para responder esta pregunta).
6. (1 pto.) Para el problema que resolvió en la Tarea 2: ¿Cuál es la función objetivo? Explique claramente las variables utilizadas y cómo la programaría (función objetivo y variable de decisión) en AMPL.

Solución:

1. Dado que es un problema lineal y que al menos existe una solución factible, entonces el conjunto de soluciones factibles es convexo (teorema demostrado en cátedra), condición suficiente para que un óptimo local sea óptimo global. Por esto la solución candidata a óptimo local es óptimo global.

2. Si. Aquí los ejemplos pueden ser muchos, lo importante es verificar que efectivamente uno es el dual del otro y que ambos sean infactibles. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ll}
 \max X_1 + 2 * X_2 & \min Y_1 + 2 * Y_2 \\
 s.a. & s.a. \\
 X_1 + X_2 \leq 1 & Y_1 + Y_2 \leq 1 \\
 X_1 + X_2 \geq 2 & Y_1 + Y_2 \geq 2 \\
 X_1 \leq 0 & Y_1 \geq 0 \\
 X_1 \geq 0 & Y_1 \leq 0
 \end{array}$$

3. El vector x puede ser representado como

$$x = \sum_{i \in P} \lambda_i X_i + \sum_{j \in Q} \mu_j Y_j, \quad \sum_{i \in P} \lambda_i = 1, \quad \forall \lambda_i, \mu_j \geq 0$$

donde P es el conjunto de puntos extremos y Q es el conjunto de direcciones extremas.

En este caso los puntos pertenecientes al espacio de soluciones factibles no pueden ser escritos sólo como combinación lineal de los puntos extremos del problema (como en el caso en que $\text{Car}(S)$ es vacío) porque es un espacio no acotado, por lo que debe utilizarse adicionalmente una combinación de las direcciones extremas.

- 4.
- Falso**, en los problemas no acotados la puede no ser acotada y no se alcanza con simplex. Sólo se puede encontrar una dirección de no acotamiento.
 - Falso**, es posible alcanzar la solución óptima puntos no extremos, como en el caso de infinitas soluciones, lo que está garantizado es que al menos una de estas soluciones óptimas es un punto extremo.
 - Verdadero**, Una vez que se alcanza la fase II de simplex, se parte de un punto extremo factible inicial, y con la condición de salida de la base, se garantiza que el siguiente punto cumpla que $AX = b$ y $X \geq 0$.
5. La idea es ir cambiando las columnas de la base del vértice v, de a una a la vez e ir verificando la factibilidad del nuevo punto.
6. #si EL CAMION i visita al cliente j
var x {j in CLIENTE, i in CAMION} binary;
#minimizar tiempos
minimize f : sum {i in CAMION, j in CLIENTE} T[j,i] * x[j,i];

Pregunta 2:

Sea el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad & \min w = 20y_1 + 2y_2 \\ & \text{s.a: } 4y_1 + y_2 \geq 3 \quad (1) \\ & \quad \quad 5y_1 - y_2 \geq 1 \quad (2) \\ & \quad \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. (1 pts.) Formule el problema dual del problema original, al que llamaremos (D).
2. (0.5 pts.) Grafique el problema (D), especificando claramente las restricciones, función objetivo y área factible. Calcule el óptimo.
3. (2 pts.) Resuelva el problema (D) utilizando simplex matricial, comenzando desde el origen.
4. (1 pts.) Suponga que se agrega una tercera restricción al problema (D):

$$x_1 + x_2 \geq 1 \quad (3)$$

Muestre gráficamente por qué no es posible usar el origen como base inicial. ¿Qué se debe hacer en este caso? Plantee el problema de Fase I asociado y explique qué ocurre si éste tiene solución > 0 .

5. (1.5 pts.) Encuentre el óptimo del problema original (P) usando el teorema de holgura complementaria.

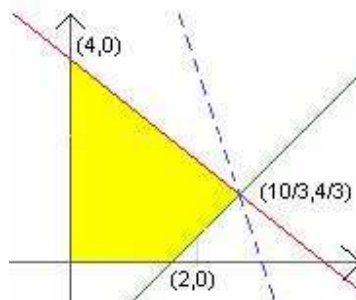
Indicación: Recuerde que:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a*d - b*c} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Solución:

1.
$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a: } 4x_1 + 5x_2 &\leq 20 \\ x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. El gráfico del problema se muestra a continuación:



El punto óptimo es $(10/3, 4/3)$ y $z = 11,3$

3. Primero se debe llevar el problema a la forma estándar

$$\begin{aligned} \min \quad & -z = -3x_1 - x_2 \\ \text{s.a:} \quad & 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Comenzamos desde el origen, por lo que las variables no básicas son X_1 y X_2 . Las variables básicas son X_3 y X_4 . Con lo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \Rightarrow & B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ R &= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \bar{R} = B^{-1} * R = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ b &= \begin{bmatrix} 20 \\ 2 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \bar{b} = B^{-1} * b = \begin{bmatrix} 20 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\begin{aligned} \bar{C}_r &= [-3 \quad -1] - [0 \quad 0] * \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \bar{C}_r = [-3 \quad -1] \end{aligned}$$

No estamos en el óptimo pues existen costos reducidos negativos.

Criterio de entrada a la base: Entra la variable con menores costos reducidos, entonces entra X_1

$$\text{Criterio de salida de la base: } \min_{\text{ais}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{a_{is}} \right\} = \left\{ \frac{20}{4} \quad \frac{2}{1} \right\} \Rightarrow \text{Sale } X_4$$

Con esto, las nuevas variables básicas son X_3 y X_1 y las no básicas X_4 y X_2

Ahora iteramos:

$$\begin{aligned}
B &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \Rightarrow & B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
R &= \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \bar{R} = B^{-1} * R = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
b &= \begin{bmatrix} 20 \\ 2 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \bar{b} = B^{-1} * b = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\begin{aligned}
\bar{Cr} &= [-3 \quad -1] - [0 \quad 0] * \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \bar{Cr} = [3 \quad -4]
\end{aligned}$$

No estamos en el óptimo pues existen costos reducidos negativos.

Criterio de entrada a la base: Entra la variable con menor costo reducido, entonces entra X_2

$$\text{Criterio de salida de la base: } \min_{ais} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right\} = \left\{ \frac{12}{9} \right\} \Rightarrow \text{Sale } X_3$$

Con esto, las nuevas variables básicas son X_2 y X_1 y las no básicas X_4 y X_3

Iteramos nuevamente:

$$\begin{aligned}
B &= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & \Rightarrow & B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/9 & -4/9 \\ 1/9 & 5/9 \end{bmatrix} \\
R &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \bar{R} = B^{-1} * R = \begin{bmatrix} -4/9 & 1/9 \\ 5/9 & 1/9 \end{bmatrix} \\
b &= \begin{bmatrix} 20 \\ 2 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \bar{b} = B^{-1} * b = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 10/3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

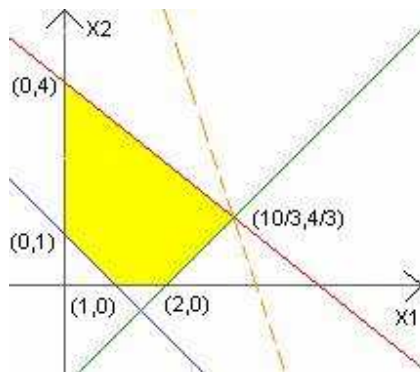
Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\begin{aligned}\bar{C}_r &= [-3 \quad -1] - [0 \quad 0] * \begin{bmatrix} -4/9 & 1/9 \\ 5/9 & 1/9 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \bar{C}_r &= [11/9 \quad 4/9]\end{aligned}$$

Como ambos costos reducidos son positivos, estamos en el óptimo.

Por lo tanto, el punto óptimo es $X_1=10/3$, $X_2=4/3$ y con esto $Z = 11,3$.

4. El nuevo gráfico será:



donde claramente se ve que el punto (0,0) no es factible, por lo que el origen no será una base factible inicial. En este caso se debe utilizar Fase I de Simplex. Cuando se encuentra el valor óptimo del problema de Fase I (que debe ser 0), se toma aquella base óptima como la base factible inicial para comenzar a iterar en el problema de Fase II.

El problema de fase I queda como sigue:

$$\begin{aligned}\min t &= t_1 + t_2 \\ \text{s.a: } 4x_1 + 5x_2 + x_3 + t_1 &= 20 \\ x_1 - x_2 + x_4 + t_2 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, t_1, t_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Si el óptimo del problema de fase I fuera >0 , entonces el problema original es infactible y necesariamente alguna de las variables auxiliares es básica.

5. Usando holgura complementaria:

$$(4x^*_1 + 5x^*_2 - 20) \cdot y^*_1 = 0$$

$$(1x^*_1 - x^*_2 - 2) \cdot y^*_2 = 0$$

$$(3 - 4y^*_1 - y^*_2) \cdot x^*_1 = 0$$

$$(1 - 5y^*_1 + y^*_2) \cdot x^*_2 = 0$$

Como x^*_1 y x^*_2 son distintos de cero, se debe cumplir que:

$$3 - 4y^*_1 - y^*_2 = 0$$

$$5y^*_1 + y^*_2 = 0$$

Resolviendo el sistema, obtenemos que $(y^*_1, y^*_2) = (4/9, 11/9)$ y con esto, $w = 11.3$

Pregunta 3:

El nuevo programa de postgrado MPA de una prestigiosa universidad ha recibido n postulaciones excelentes para su primera generación y por capacidad no puede aceptar todas. Tiene el problema de seleccionar las hasta m postulaciones más adecuadas para el programa ($m < n$).

Como es de carácter público no puede solamente seleccionar para maximizar el beneficio económico del programa. Cada generación tiene que cumplir además con los siguientes criterios.

Por lo menos 40% de los aceptados tienen que pertenecer a cada sexo. El parámetro S_i indica el sexo del postulante i ($i=1, \dots, n$). $S_i = 1$ significa femenino y $S_i = 0$ significa masculino.

El programa busca tener impacto en regiones por lo que por lo menos 50% de los aceptados de cada generación deben venir de regiones. El parámetro R_i indica la proveniencia del postulante i ($i=1, \dots, n$). $R_i = 1$ significa regiones y $R_i = 0$ significa RM.

Es importante lograr alta exigencia académica por lo que el programa quiere aceptar alumnos que en promedio tengan un puntaje de por lo menos P_{\min} . P_i es el puntaje del postulante i ($i=1, \dots, n$).

El ingreso generado por cada generación debe superar en por lo menos 20% los costos asociados C Unidades Monetarias (UM)

En un principio cada alumno aceptado tiene que pagar un arancel de A UM.

El programa ofrece hasta B becas para alumnos excelentes ($B < n$). Los criterios para otorgar estas becas son los siguientes.

Un postulante i con un puntaje P_i mayor que 750 paga sólo 50% del arancel si viene de la RM y paga sólo 25% del arancel si viene de regiones. .

El objetivo es maximizar el ingreso generado por cada generación aceptada.

1. (5 pts.) Plantee un modelo de Programación Lineal para resolver este problema.
2. (1 pto.) ¿Son todas las restricciones mencionadas necesarias? Comente.
3. (Bonus 1 pto.) ¿Se está favoreciendo a alguien con la formulación actual?

Solución:

1. Variables de decisión:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Si se acepta al alumno } i \\ 0 & \sim \end{cases} \quad (0,7 \text{ pts})$$

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{Si alumno } i \text{ recibe beca} \\ 0 & \sim \end{cases} \quad (0,6 \text{ pts})$$

Nota: si el alumno pone una variable 1 si tienen mas de 750 pts y cero sino, sólo tendrá el puntaje en la restricción de asignar las becas (h) si relaciona dicha variable con el puntaje mediante una restricción y dicha restricción está bien planteada.

Restricciones: (0,3 pts c/u)

- a. Relación entre variables:

$$Y_i \leq X_i$$

- b. Se aceptan a lo más m postulantes:

$$\sum_{i=1}^n X_i \leq m$$

- c. Al menos 40% de los aceptados deben ser de cada sexo:

$$0,4 * \sum_{i=1}^n X_i \leq \sum_{i=1}^n X_i * S_i \leq 0,6 * \sum_{i=1}^n X_i$$

- d. 50% de los aceptados deben venir de regiones:

$$0,5 * \sum_{i=1}^n X_i \leq \sum_{i=1}^n X_i * R_i$$

- e. Puntaje promedio de los alumnos debe ser al menos Pmin:

$$P_{\min} * \sum_{i=1}^n X_i \leq \sum_{i=1}^n X_i * P_i$$

- f. Ingreso generado debe superar en al menos 20% los costos:

$$\sum_{i=1}^n X_i * A - \sum_{i=1}^n Y_i * R_i * 0,75 * A - \sum_{i=1}^n Y_i * (1 - R_i) * 0,5 * A \geq 1,2 * C$$

g. Máximo B becas:

$$\sum_{i=1}^n Y_i \leq B$$

h. Criterio para otorgar becas:

$$(X_i - Y_i) * P_i \leq 750$$

i. Naturaleza de las variables:

$$X_i, Y_i \in \{0,1\}$$

Función objetivo: (1 pto)

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^n X_i * A - \sum_{i=1}^n Y_i * R_i * 0,75 * A - \sum_{i=1}^n Y_i * (1 - R_i) * 0,5 * A \right\}$$

2. Se puede eliminar la restricción i: ingreso > 1,2 * costos, pues al maximizar el ingreso podemos ver si se da o no esta restricción.
También se puede eliminar la restricción a: relación entre variables, pues dar becas disminuye la función objetivo, lo que hace que no tenga sentido asignar becas a postulantes que no hayan sido aceptados.
3. Nota: Lo que sigue tiene puntaje binario, es decir, todo o nada. El alumno puede tener máximo 1 punto, aún si contesta ambas alternativas planteadas.

Alternativa 1 (1 pto): Al maximizar el ingreso se favorece a los postulantes de menor puntaje, ya que se intentará dar la menor cantidad de becas posibles.

Alternativa 2 (0,5 pts): La restricción h obliga a que un alumno con más de 750 y que ha sido aceptado tenga beca. Por lo tanto, si se nos acaban las B becas, los alumnos restantes con más de 750 puntos no serán aceptados en la universidad. No se les da la posibilidad de pagar el arancel completo, simplemente se rechazan.

Dudas y/o comentarios a:

André Carboni

acarboni@ing.uchile.cl