



**Control 2 IN34A  
6 de Octubre de 2004**

**Problema 1**

Dado el siguiente problema (P):

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{Máx} \quad z = c^T x = x_1 + x_2 \\ & \text{s.a} \quad 2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ & \quad \quad 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- (i) Muestre el problema gráficamente.
- (ii) Resuelva el problema aplicando el algoritmo Simplex y empezando con el origen como primera solución básica.
- (iii) Responda: ¿En qué rango pueden variar los dos coeficientes del vector  $c$  sin cambio de la base óptima? ¿Cuáles serían las bases óptimas si los coeficientes saliesen de este rango? Justifique su respuesta.

**Problema 2**

1.-Resuelve:

- (i) ¿Cómo detecta el algoritmo Simplex la presencia de óptimos múltiples en un PL?
- (ii) ¿Puede suceder que en un PL de minimización exista algún costo reducido negativo, pero que en esa iteración del Simplex la función objetivo no pueda ser mejorada?

2.-

- (i) Demostrar que si el problema primal es no acotado entonces su correspondiente dual es infactible.
- (ii) Mostrar con un ejemplo que la recíproca de 2 (i) no es necesariamente cierta.

3- Sea  $x^*$  punto óptimo del Problema Lineal (P) obtenido mediante el método Simplex.

(i) Suponga que modifica un costo  $c_j$  y  $x^*$  deja de ser óptimo. ¿Cómo procedería para encontrar el óptimo del nuevo problema?

(ii) Suponga que modifica una componente del vector de lado derecho ( $b_i$ ) y  $x^*$  deja de ser óptimo.  
¿Cómo procedería para encontrar el óptimo del nuevo problema?

### Problema 3

Mr. Black Suerte, un famoso magnate de la zona, ha decidido elaborar un horario con sus compromisos amorosos para la semana.

El conflicto del magnate yace en que posee  $N$  novias en la ciudad. Cada novia  $i$  le exige una visita semanal de  $T_i$  horas de duración. Se sabe además que todas las novias desean ser visitadas al principio de la semana, dado que esto demuestra preocupación de parte de Black por ellas. Por lo anterior, cada novia disminuye las atenciones preparadas (se arregla menos y no prepara comidas tan ricas) a medida que nuestro amigo se demora en visitarlas, lo que le causa a Black un costo  $C_i$  por cada hora que demora en ir a visitar a la novia  $i$ .

Como Mr. Black no quiere perder ni pan ni pedazo, no dejará de ver a ninguna de sus novias y para no caer en las garras del amor, no efectúa más de una visita a cada novia. Además, para no causar conflicto, sólo visita a una novia a la vez.

Ayude a nuestro complicado magnate amigo a decidir el orden de visita a sus novias y el instante en que debe acudir a cada una de ellas para poder estructurar su horario, de forma tal que los costos incurridos sean los mínimos posibles.

Nota: Considere que las horas de sueño y de comida de Black se incluyen en las horas pasadas con sus novias. Además suponga que

$$\sum_{i=1}^N T_i \leq 7 * 24$$



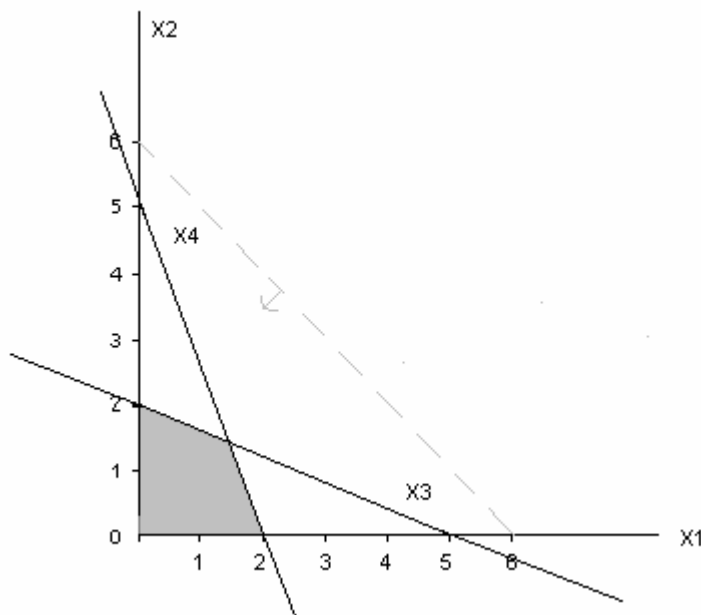
**Pauta Control 2 IN34A**  
**6 de Octubre de 2004**

**Problema 1**

Dado el siguiente problema (P):

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{Máx} \quad z = c^T x = x_1 + x_2 \\ & \text{s.a} \quad 2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ & \quad \quad 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(i)



(ii)

Llevemos el problema a la forma estándar para Simplex.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & -x_1 - x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Empezando desde el origen:

$$B = \begin{matrix} & X_3 & X_4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \rightarrow R = \begin{matrix} & X_3 & X_4 \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$B = I^{-1} \rightarrow \bar{b} = b = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (-1, -1) \leq 0 \quad \text{Esto quiere decir que no estamos en el óptimo y que indistintamente } X_1 \text{ o } X_2 \text{ pueden entrar a la base}$$

Criterio de Salida:

$$\min \begin{matrix} & X_3 & X_4 \\ \left\{ \frac{10}{5}, \frac{10}{2} \right\} \end{matrix} = \min \{2, 5\} = 2 \quad X_3 \text{ sale de la base}$$

Iteración 1 (si se saca  $X_2$ )

$$B = \begin{matrix} & X_2 & X_4 \\ \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \rightarrow R = \begin{matrix} & X_1 & X_4 \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -2/5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (-1, 0) - (-1, 0) \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -2/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = (-1, 0) + (1/5, 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = (-1, 0) + (2/5, 1/5) = (-3/5, 1/5)_{X_1, X_3} \quad \text{Esto quiere decir que no estamos en el óptimo y que } X_1 \text{ entra a la base pueden entrar a la base}$$

$$\bar{A}_{\bullet 1} = B^{-1} \cdot A_{\bullet 1} = B^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 21/5 \end{pmatrix}$$

Criterio de Salida:

$$\min \begin{matrix} & X_2 & X_4 \\ \left\{ \frac{2}{2/5}, \frac{6}{21/5} \right\} \end{matrix} = \min \left\{ 5, \frac{30}{21} \right\} = 10/7 \quad X_4 \text{ sale de la base}$$

### Iteración 1 (si se saca $X_1$ )

$$B = \begin{matrix} & X_3 & X_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{matrix} \rightarrow R = \begin{matrix} & X_4 & X_2 \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2/5 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (0, -1) - (0, -1) \begin{pmatrix} 1 & -2/5 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = (0, -1) + (1/5, 2/5) = (1/5, -3/5)$$

Esto quiere decir que no estamos en el óptimo y que  $X_2$  entra a la base pueden entrar a la base

$$\bar{A}_{\bullet 1} = B^{-1} \cdot A_{\bullet 1} = B^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

Criterio de Salida:

$$\min \left\{ \frac{6}{21/5}, \frac{2}{2/5} \right\} = \min \left\{ 30/21, 5 \right\} = 10/7 \quad X_3 \text{ sale de la base}$$

Ambas iteraciones arrojan la misma base para la iteración 2

### Iteración 2:

$$B = \begin{matrix} & X_2 & X_1 \\ \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \end{matrix} \rightarrow R = \begin{matrix} & X_4 & X_3 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 5/21 & -2/21 \\ -2/21 & 5/21 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 30/21 \\ 30/21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/7 \\ 10/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (0, 0) - (-1, -1) \begin{pmatrix} 5/21 & -2/21 \\ -2/21 & 5/21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = (0, 0) + (1, 1) \begin{pmatrix} -2/21 & 5/21 \\ 5/21 & -2/21 \end{pmatrix} = (3/21, 3/21) \geq 0 \Rightarrow \text{óptimo}$$

$$z = \frac{-10}{7} - \frac{10}{7} = \frac{-20}{7} = z^*$$

Observemos que, en el óptimo, ambas restricciones son activas.

(iii) En el problema inicial se tiene que  $c=(1,1)$

Así si se consideran  $c = (c_1, c_2)$  arbitrarios.

$$\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (0,0) - (-c_1, -c_2) \begin{pmatrix} 5/21 & -2/21 \\ -2/21 & 5/21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = (0,0) + (c_1, c_2) \begin{pmatrix} -2/21 & 5/21 \\ 5/21 & -2/21 \end{pmatrix} = \left( \underbrace{-\frac{2c_1}{21} + \frac{5c_2}{21}}_{X_4}, \underbrace{\frac{5c_1}{21} - \frac{2c_2}{21}}_{X_3} \right) \geq 0 \Rightarrow \text{óptimo}$$

- $X_4$  entra a la base si el costo reducido asociado se hace negativo lo que sucede cuando:

$$c_2 \leq \frac{2}{5} c_1$$

Si esto sucede nos movemos al punto (0,2) lo que implica que la base queda como:

$$B = \begin{pmatrix} \overset{X_2}{5} & \overset{X_4}{0} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Así el rango en el cual se mantiene el óptimo encontrado en la parte (ii) es:

$$\frac{2}{5} c_1 \leq c_2 \leq \frac{5}{2} c_1$$

Cuando  $x_4$  entra a la base la segunda restricción se hace inactiva y, como simplex se mueve a los vértices adyacentes, sabemos que  $x_4$  es inactiva, lo que indica que estamos en el punto (0,2)

- $X_3$  entra a la base si el costo reducido asociado se hace negativo lo que sucede cuando:

$$c_1 \leq \frac{2}{5} c_2$$

Si esto sucede nos movemos al punto (2,0) lo que implica que la base queda como:

$$B = \begin{pmatrix} \overset{X_3}{1} & \overset{X_1}{2} \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Así el rango en el cual se mantiene el óptimo encontrado en la parte (ii) es:

$$\frac{2}{5} c_2 \leq c_1 \leq \frac{5}{2} c_2$$

Cuando  $x_3$  entra a la base la primera restricción se hace inactiva y, como simplex se mueve a los vértices adyacentes, sabemos que  $x_4$  es inactiva, lo que indica que estamos en el punto (2,0)

## **Problema 2**

1.-a) Si en el óptimo existe al menos una variable no básica con costo reducido nulo (y que tiene rango factible para crecer), el problema admite puntos óptimos alternativos.

b) Si, si estoy en una solución degenerada y la variable básica que vale 0 debería pasar a valores negativos si hiciéramos crecer la variable no básica correspondiente al costo reducido negativo.

En este caso, puedo entonces cambiar la base pero sin modificar la solución factible básica.

2.-a): Suponer que el dual es factible y ver que entonces existe una cota para el primal, usando el teorema débil de dualidad.

Si suponemos sin pérdida de generalidad el siguiente problema primal-dual.

$$\begin{aligned} \text{(P) Min } z &= c^t x \\ \text{s.a. } Ax &\geq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(D) Max } w &= y^t b \\ \text{s.a. } A^t y &\leq c \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

El teorema débil de dualidad nos dice que:

$$Z(x^*) \geq W(y^*)$$

Si el primal es no acotado, no puede existir una cota inferior para  $z$ , por lo que el dual se torna infactible, dado que  $w$  disminuye hasta infinito.

b) Dar un ejemplo de primal y dual infactibles.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{(P) Min } z &= 2x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a. } 3x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ 4x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(D) Max } w &= 6y_1 + 4y_2 \\ \text{s.a. } 3y_1 + 4y_2 &\leq c \\ 2y_1 + y_2 &\leq -2 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

3- a) Aplicaría Simplex a partir de la base  $B^*$  correspondiente a  $x^*$ .

b) Dado que los costos reducidos no se vieron afectados, si  $x^*$  no es óptimo es porque dejó de ser factible. Por ello no puedo en este caso aplicar Simplex a partir del óptimo del primal. En cambio, puedo aplicar Simplex en el dual a partir del óptimo del dual (dado que en el dual no perdí factibilidad porque estoy cambiando un coeficiente correspondiente en el este problema a la función objetivo).

### Problema 3:

#### Variables decisión:

$t_i$  : instante en que se inicia la visita a la novia  $i$  0.5ptos

$X_{ij}$  : 1 si visito a la novia  $j$  a continuación de la  $i$  0.5ptos  
0 si no.

#### Función objetivo:

$$\min \sum_{i=1}^N C_i t_i \quad 0.5 \text{ ptos}$$

#### Restricciones: Cada restricción tiene 0.5 ptos

$t_j > t_i + T_i - (1 - X_{ij})M \quad \forall i, j=1, \dots, N$  Debe iniciarse la visita  $j$  en un instante mayor al  $i$  si es que se decide visitarla a continuación de la  $i$ .  $M$  es un número grande.

$\sum_{i=1}^N X_{i, N+1} = 1$  Existe solo una última visita.

$\sum_{j=1}^N X_{0, j} = 1$  Existe solo una primera visita.

$\sum_{i=1}^N X_{i, j} = 1$  Solo una visita puede precedir a la  $j$ .  $\forall j=1, \dots, N$

$\sum_{j=1}^N X_{i, j} = 1$  Solo una visita puede suceder a la  $i$ .  $\forall i=1, \dots, N$

$X_{ii}=0 \quad \forall i=1, \dots, N$  No puedo visitar dos veces seguidas a la misma novia.

$t_i \leq 24*7 \quad \forall i=1, \dots, N$  Todas las visitas se deben iniciar antes de 1 semana

$t_j = t_i + a \quad a \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \forall i, j=1, \dots, N$  No se puede hincar dos citas simultáneamente

$X_{ij} \in \{0, 1\}, t_i \geq 0$  Naturaleza de las variables.

Nota de corrección: Recordar que un PPL se puede plantear de varias formas, aplicar criterio.