



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y
Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A Optimización
Semestre Otoño 2006

Profesor: Guillermo Duran
Richard Weber

Auxiliares: Marianela Pereira
Ximena Schultz
Rodrigo Wolf

Control 3 IN34A 7 de Junio de 2006

Problema 1

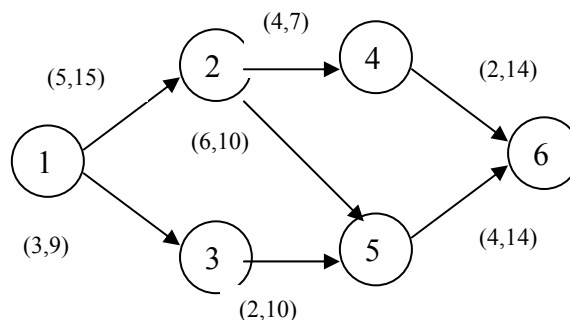
1) ¿Es cierto que un problema de programación lineal entera (con poliedro de la relajación lineal acotado) puede ser siempre resuelto mediante la solución de una cantidad polinomial (en el tamaño de la entrada) de problemas de programación lineal continua? Justifique.

2) En función de lo analizado en 1), explique si en general es más fácil, más difícil o de la misma complejidad computacional resolver un problema de programación lineal continua o uno de programación lineal entera. Justifique.

3) Resuelva uno de los siguientes problemas:

a) ¿Es cierto que el algoritmo de Dijkstra para rutas mas cortas puede no servir si hay algun arco con longitud negativa? Justifique.

b) Si tuviera que encontrar el flujo mínimo en la siguiente red con capacidades máximas y mínimas en cada arco y un flujo inicial factible dado, que técnicas usaría? Explique y aplíquelo al siguiente ejemplo:



Con flujo inicial factible:

$f_{12}=14$; $f_{13}=4$; $f_{24}=7$; $f_{25}=7$; $f_{35}=4$; $f_{46}=7$; $f_{56}=11$

Problema 2

1) Resuelva el siguiente problema de programación lineal entera:

$$\begin{array}{ll} \text{PE} & \max \quad 5x_1 + 7x_2 \\ & \text{s.a} \quad x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ & \quad \quad 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras} \end{array}$$

Determine la solución óptima de PE aplicando el algoritmo ramificación y acotamiento. Para la primera ramificación tome la variable x_2 y resuelva geoméricamente los subproblemas.

2) Explique brevemente en qué situaciones no es necesario ramificar un nodo durante el algoritmo ramificación y acotamiento. Mencione tres situaciones y justifique su respuesta para cada una.

Problema 3

A la selección brasilera le quedan F amistosos (con F impar) antes del mundial, además ellos ya saben que llegarán a la final de este torneo por lo que en su futuro próximo hay $F + 7$ partidos (número par de partidos).

Sin embargo, los penta campeones saben que si no cumplen con los siguientes requisitos solicitados tanto por los jugadores como por los preparadores físicos no saldrán campeones. Es así como Ronaldinho (el n° 10) exige jugar al menos un 30% más que Kaka (el n° 8) durante todo el Mundial. Por su parte, Ronaldo (el n° 9) se niega a jugar junto con Adriano (el n° 7) y es más, exige que Adriano vaya jugando a lo más un 95% de lo que él (Adriano) jugó el partido anterior. Dichas exigencias son válidas también para los amistosos, además usted sabe que dado la trascendencia de ambos jugadores si Ronaldo no está en la cancha, Adriano está jugando y viceversa.

Por su parte Cafu (el n° 2) ha señalado que él no pisara ningún minuto el campo de juego si Roberto Carlos (el n° 3) esta en cancha aunque sea por muy poco tiempo ya que no le parece un buen compañero por la banda izquierda, ante tal situación el n° 3 ha señalado que él tampoco desea vestirse de corto si Cafu va a haber participado del pleito, es decir, si uno juega es un hecho que el otro no lo hace. Por otra parte usted también sabe que aquellos jugadores que no vean acción en los partidos amistosos no jugaran ningún partido en el mundial, ya que el técnico considera que dichos jugadores no tienen el suficiente ritmo competitivo

Como si todo esto fuera poco, el cuerpo médico ha señalado que cada jugador puede jugar como máximo T_i ($i \in \{1, \dots, 23\}$, el plantel es de 23 jugadores) minutos cada dos partidos seguidos.

Pero no todas son malas noticias. La Confederación Brasileira de Fútbol sabe que cada minuto que juega el jugador “ i ” en los amistosos, les reporta C_i unidades monetarias (UM) y cada minuto que juegue en el Mundial genera P_i UM si es partido de primera fase (son tres partidos en esta etapa) y P_i UM en los partidos de posteriores.

Ante tal situación el pueblo de Brasil le ruega genere un PPL que permita determinar qué jugadores deben jugar cada partido y que, además, les permita ganar el máximo dinero posible.

La hinchada brasilera le ha señalado que recuerde que en un partido de fútbol hay 11 jugadores por cada equipo en cancha, además de tres árbitros, también le han comentado que suponga que los partidos duran exactamente 90 minutos, que ningún jugador se lesiona y que nadie es expulsado. Además le dicen que en cada partido se pueden realizar hasta tres cambios

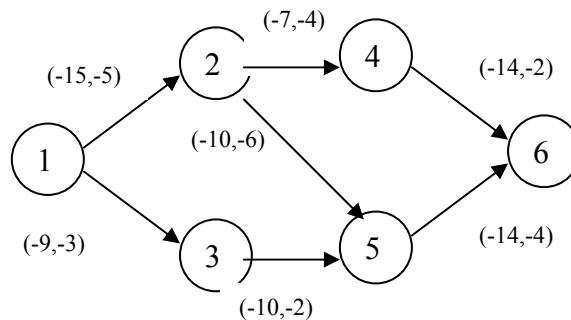
De la adecuada resolución de este PPL mixto depende el título de Brasil.

Pauta

Problema 1

- 1) Es falso, dado que si fuera cierto PE sería polinomial. Lo que es cierto es que se puede resolver con un número finito de problemas lineales, pero no necesariamente polinomial en el tamaño de la entrada del problema original.
- 2) Es más difícil en general resolver un PE que un PL, dado que el primero es NP-completo y el segundo es polinomial.
- 3a) Es cierto. Por ejemplo en una red de 3 nodos, si hay un camino del 1 al 3 de longitud 2, otro del 1 al 2 de longitud 3 y otro del 2 al 3 de longitud -2, Dijkstra no encuentra la ruta más corta del 1 al 3 (encuentra el camino de longitud 2 y no el de longitud 1).
- 3b) Hay 2 formas de resolverlo. Una, multiplicar todos los valores por (-1), aplicar Ford y Fulkerson normalmente, hallar flujo máximo y después volver a multiplicar el resultado final por (-1). Otra, hacer algo análogo a F&F pero buscando caminos de disminución en vez de caminos de aumento. Cuando no hay más, el flujo es mínimo.

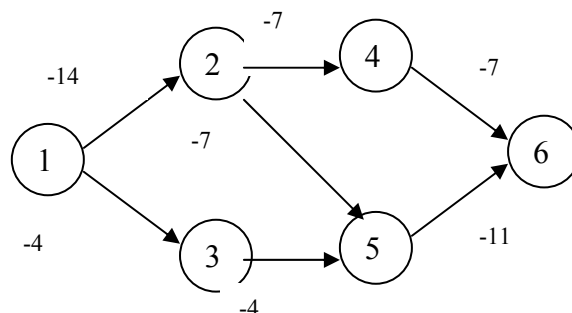
Si tomamos la primera opción:



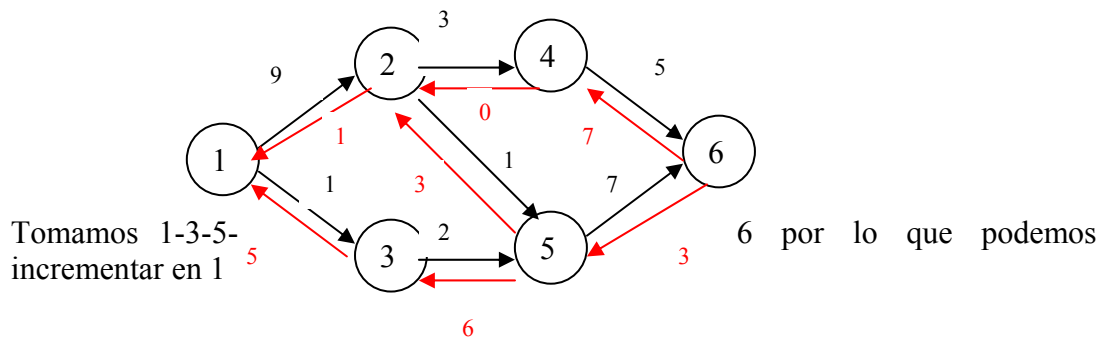
Con flujo inicial factible:

$f_{12} = -14$; $f_{13} = -4$; $f_{24} = -7$; $f_{25} = -7$; $f_{35} = -4$; $f_{46} = -7$; $f_{56} = -11$

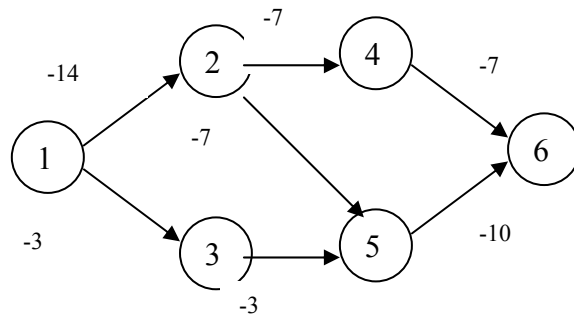
Iteración 1:



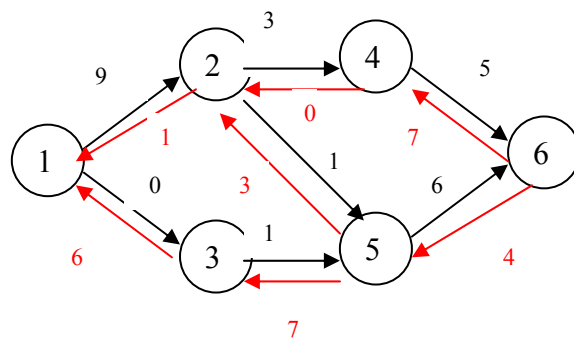
El auxiliar queda



Iteración 2:

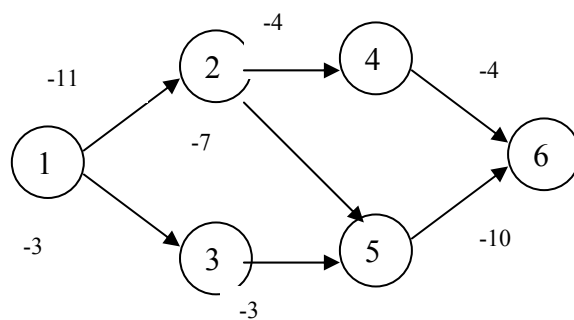


El auxiliar queda

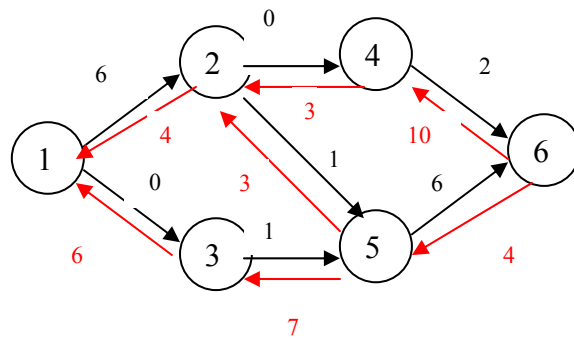


Tomamos 1-2-4-6 como camino, por lo que podemos incrementar en 3

Iteración 3:

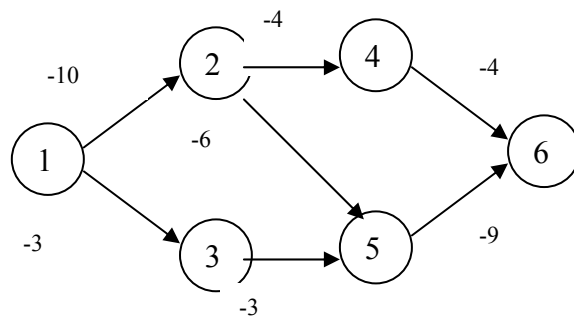


El auxiliar queda

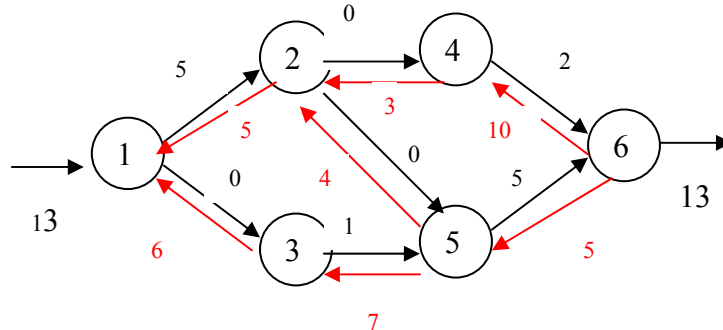


Tomamos 1-2-5-6 por lo que podemos incrementar en 1

Iteración 4:



El auxiliar queda

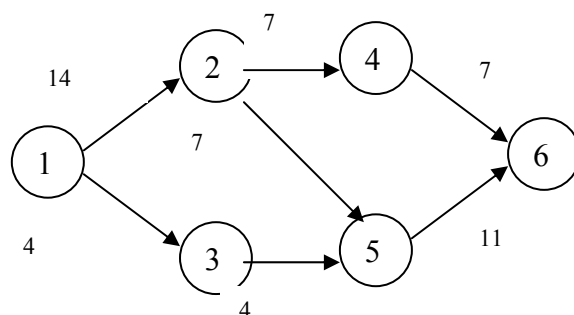


No podemos generar ningún camino de 1 a 6, por lo tanto la solución es -13 (este es el flujo máximo de nuestro problema auxiliar).

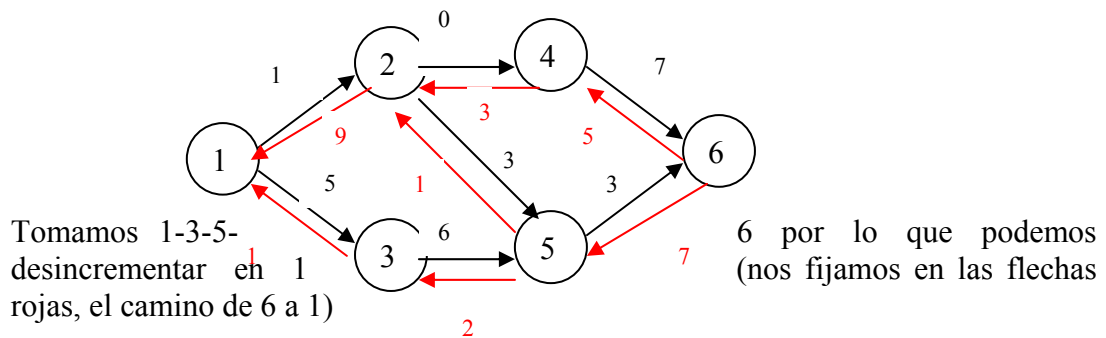
Ahora debemos volver a multiplicar todo por -1 por lo que el flujo mínimo de nuestro problema original es 13.

Si tomamos la segunda opción, el resultado es el mismo salvo que ahora en vez de fijarnos en el máximo aumento posible, nos fijamos en la máxima disminución posible:

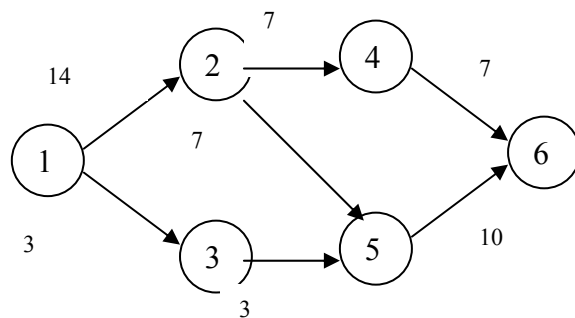
Iteración 1:



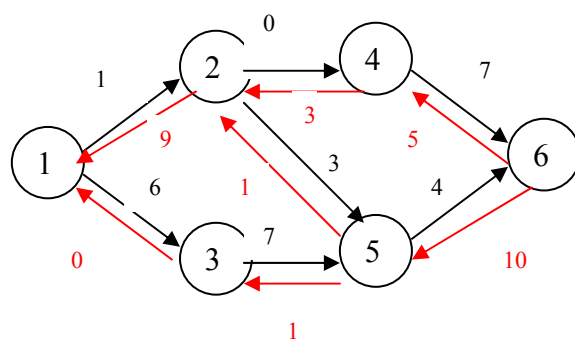
El auxiliar queda



Iteración 2:

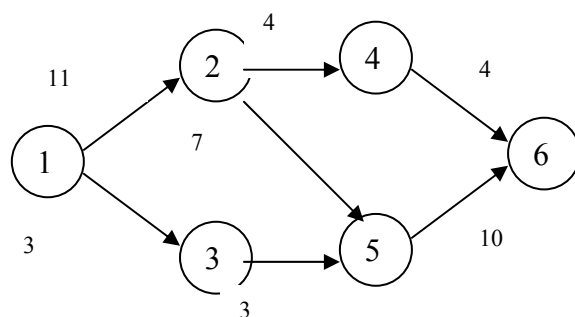


El auxiliar queda

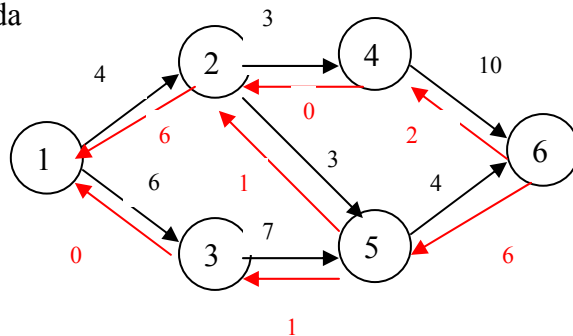


Tomamos 1-2-4-6 como camino, por lo que podemos desincrementar en 3

Iteración 3:

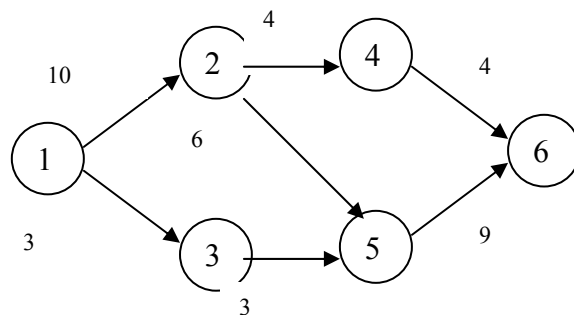


El auxiliar queda

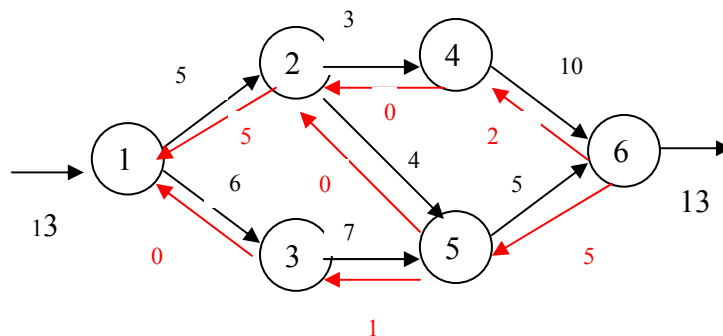


Tomamos 1-2-5-6 por lo que podemos desincrementar en 1

Iteración 4:



El auxiliar queda



Luego ya no podemos seguir disminuyendo más (análogo a no hay más caminos de 6 a 1, los rojos)

Por lo tanto 13 es la respuesta.

2 puntos por pregunta

En la 3 si alguien hace bien ambas que sume tres puntos.

Observación: para aquel que hace los 2, que se le ponga el puntaje del que hizo mejor. Si el otro esta regular, que le sume algo como bonus (no todo el punto extra).

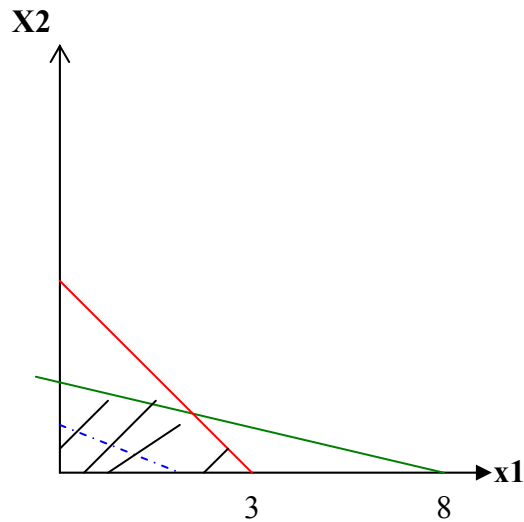
Problema 2

1)

$$\text{MAX } 5x_1 + 7x_2$$

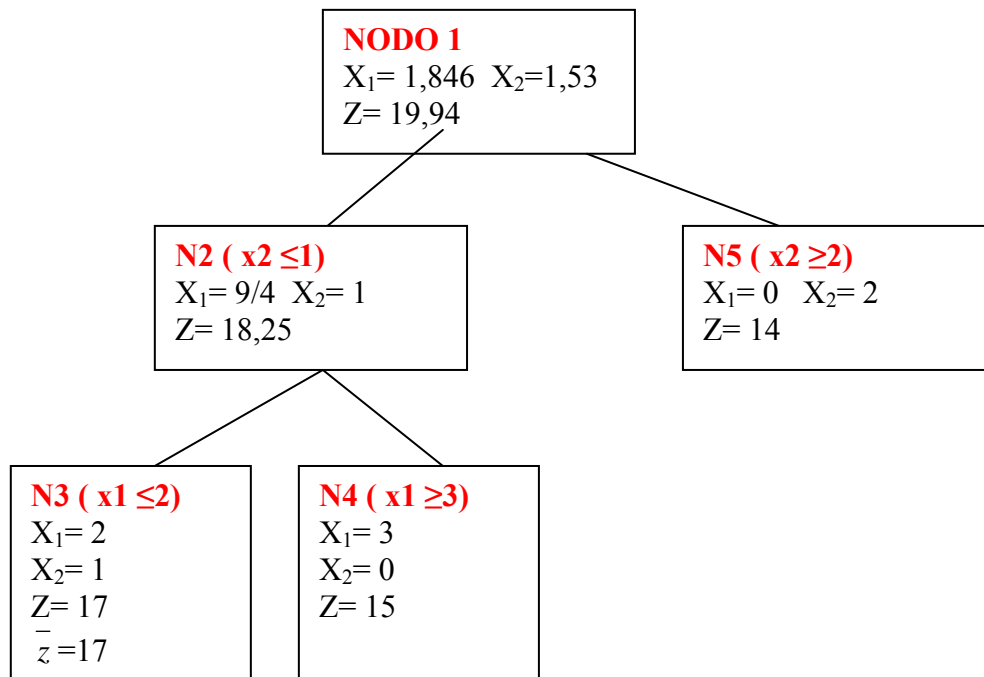
$$\text{sa: } x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$



Lo primero que hay que hacer es resolver el relajado que consiste en resolver el sistema de ecuaciones, que constituyen las 2 restricciones, el que da por solución $x_1 \approx 1,846$ y $x_2 \approx 1,53$.

Una vez hecho esto se inicia la ramificación por la variable x_2 , los subproblemas que se producen y su resolución se ilustran en el siguiente árbol:



Por lo tanto el optimo es $X_1= 2$ $X_2= 1$ $Z= 17$.

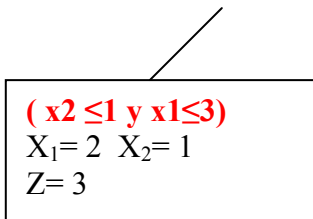
(OJO: si se parte ramificando según la numeración de los nodos $Z=17$ será el primer y único incumbente, pero si el orden fuese distinto aparecerían otros incumbentes)

Puntaje: 0,6 puntos por cada nodo

2) No es necesario ramificar cuando se llega a:

Un nodo entero, ya que si seguimos agregando más restricciones al poliedro es imposible encontrar una solución entera mejor para esa rama

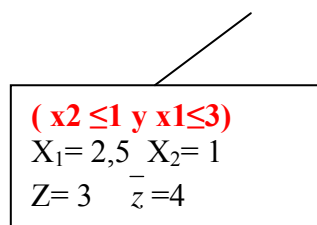
Ejemplo:



$(x_2 \leq 1 \text{ y } x_1 \leq 3)$
 $X_1 = 2 \quad X_2 = 1$
 $Z = 3$

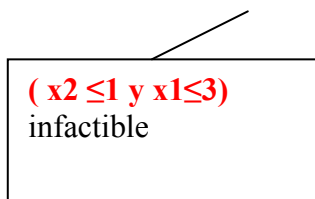
Un nodo con $z \leq \bar{z}$ (problema maximización), ya que si a un problema yo le agrego más restricciones es imposible obtener una mejor función objetivo, luego si la que ya tenemos es peor que el incumbente será imposible por esa rama encontrar algo mejor

Ejemplo:



$(x_2 \leq 1 \text{ y } x_1 \leq 3)$
 $X_1 = 2,5 \quad X_2 = 1$
 $Z = 3 \quad \bar{z} = 4$

Un nodo infactible (agregamos más restricciones sigue siendo infactible)



$(x_2 \leq 1 \text{ y } x_1 \leq 3)$
infactible

Aquí ocurre el caso 3, en este ejemplo hay que señalar que se llega a infactible porque las distintas restricciones que se van agregando generan conjuntos disjuntos en el poliedro de las soluciones factibles o porque alguna de las restricciones que se agregaron no intersectan el poliedro de soluciones factibles.

También en este caso (al igual que los otros) se podría ejemplificar con un gráfico en el que se vea que no hay factibilidad.

Puntaje: 1 punto por cada criterio con su respectivo ejemplo (0,5 por saber el criterio, 0,5 pr argumentarlo)

Problema 3

Variables de decisión:

X_{it} : minutos que juega jugador i en partido t
 $Y_{it} = \begin{cases} 1 & \text{si jugador } i \text{ juega en partido } t \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$

Restricciones:

1) Naturaleza de las Variables

$$X_{it} \geq 0$$

$$Y_{it} \in \{0,1\}$$

2) El 10 juega 30% más que el 8 en el mundial

$$(1,3)^* \sum_{t=F+1}^{F+7} X_{8t} \leq \sum_{t=F+1}^{F+7} X_{10t}$$

3) Adriano y Ronaldo no juegan juntos, pero si no esta uno esta el otro

$$X_{9t} + X_{7t} = 90 \quad \forall t = 1, \dots, F+7$$

4) Adriano juega a lo más 95% del tiempo que jugo partido anterior

$$X_{7(t+1)} \leq 0,95 * X_{7t} \quad \forall t = 1, \dots, F+6$$

5) Cafu y Roberto Carlos no pueden haber participado en un mismo match

$$Y_{2t} + Y_{3t} \leq 1$$

6) Si no jugaron en los amistosos no juegan en el mundial

$$\sum_{t=F+1}^{F+7} Y_{it} \leq \sum_{t=1}^F Y_{it} * M \quad \forall i \in \{1, \dots, 23\}; M \text{ grande}$$

(De esta forma si no juegan ningún amistoso el termino de la derecha vale cero y obliga a que los jugadores no jueguen en el mundial, en cambio si jugaron un amistoso, si tienen la posibilidad de jugar)

7) Capacidad de minutos en cancha (cada dos partidos deben jugar como máximo T_i)

$$\sum_{t=2k-1}^{2k} X_{it} \leq T_i \quad \forall i \in \{1, \dots, 23\}; \forall k \in \{1, \dots, (F+7)/2\}$$

$$\sum_{t=2k}^{2k+1} X_{it} \leq T_i \quad \forall i \in \{1, \dots, 23\}; \forall k \in \{1, \dots, (F+5)/2\}$$

(La primera sumatoria es para considerar los partidos seguidos 1-2; 3-4; etc. Mientras que la segunda sumatoria nos permite validar la restricción para los partidos seguidos

tipo 2-3, 4-5, etc. De esta forma logramos abarcar todo el set de partidos seguidos que se le avecinan a Brasil)

También se puede escribir esta restricción así:

$$\sum_{t=k}^{k+1} X_{it} \leq T_i \quad \forall i \in \{1, \dots, 23\}; \forall k \in \{1, \dots, F+6\}$$

8) Relación restricciones y máximo 90 minutos por partido

$$X_{it} \leq 90 * Y_{it} \quad \forall i \in \{1, \dots, 23\}; \forall t \in \{1, \dots, F+7\}$$

(Se puede separar esta restricción en dos, una que relacione las variables:

$$X_{it} \leq M * Y_{it} \quad \text{con } M \text{ grande}$$

Y otra que especifique el máximo tiempo que pueden estar en cancha:

$$X_{it} \leq 90)$$

9) Siempre deben haber 11 jugadores en la cancha (no hay expulsados, ni lesionados)

$$\sum_{i=1}^{23} X_{it} = 90 * 11 \quad \forall t \in \{1, \dots, F+7\}$$

10) En un partido pueden haber jugado como máximo 14 jugadores (3 cambios)

$$\sum_{i=1}^{23} Y_{it} \leq 14 \quad \forall t \in \{1, \dots, F+7\}$$

La restricción 8) más la 9) obligan a que en el peor de los casos sólo hayan 11 jugadores pisado el campo de juego, ya que si un jugador puede estar como máximo 90 minutos en cancha, y por otra parte obligamos a que la suma de los tiempos sea $90 * 11$, esto no se puede cumplir si no participaron al menos 11 “atletas”.

Si alguien no se dio cuenta de eso, igual puede agregar:

$$\sum_{i=1}^{23} Y_{it} \geq 11$$

Pero no tiene puntaje adicional

Función Objetivo

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{23} \sum_{t=1}^F C_i * X_{it} + \sum_{i=1}^{23} \sum_{t=F+1}^{F+3} P_{ip} * X_{it} + \sum_{i=1}^{23} \sum_{t=F+4}^{F+7} P_{is} * X_{it}$$

PUNTAJE

0,4 por cada variable de decisión

0,3 por la restricción 1; 0,4 por restricciones 2,3 y 4; 0,6 por restricción 6 y 7; 0,5 por el resto de las restricciones (5,8,9 y 10); 0,5 por la función objetivo

NOTA: si la rest 7 esta expresada como: $X_{i1} + X_{i2} \leq T_i$; $X_{i2} + X_{i3} \leq T_i$ y así

Poner solo 0,3 porque la correcta notación matemática de y así es la sumatoria

OJO: 1) Pueden haber distintas formas de resolver el problema, lo importante es que las restricciones aquí señaladas estén bien expresadas.

2) Si no resolvieron el problema de forma mixta como se señalaba, no restar puntaje por ello, sin embargo, si no existe una variable que indique el tiempo en forma continua, no se puede lograr la función objetivo de forma correcta, ya que excluirá la posibilidad de que el jugador haya estado 6,88 minutos en cancha por ejemplo, luego si no hay variables continuas en la función objetivo, pero esta bien planteada poner 0,3.