



Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Civil Industrial.

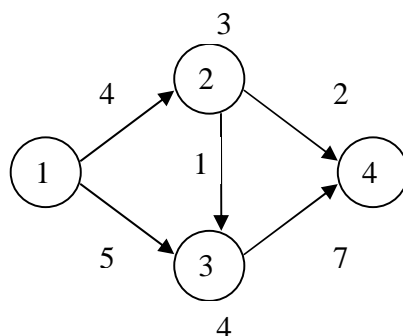
IN34A Optimización
Profesores: Guillermo Durán.
Richard Weber.
Auxiliares: S. Guzmán. M. Pereira.
M. Pulido. X. Schultz.

Control 3
02 de Noviembre de 2005

Problema 1

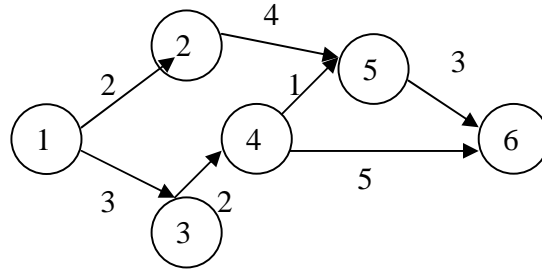
Responda las siguientes preguntas:

1. Dado el problema del vendedor viajero, escriba la familia de restricciones que garantiza que en el conjunto de soluciones factibles no pueden aparecer sub-tours. (1,5 pts.).
2. Suponga que aplica el algoritmo SIMPLEX para resolver la relajación lineal de un problema de programación lineal entera. ¿En qué casos puede afirmar que el óptimo obtenido es el óptimo del problema entero? (1 punto).
3. Si en el algoritmo de B&B pretende obtener rápidamente una cota para el valor de la función objetivo, ¿elegirá ramificar a lo ancho o en profundidad? Justifique. (1,5 pts.).
4. Suponga que en una red dada, además de capacidades máximas para el flujo en cada arco, se le asigna una capacidad máxima al flujo que puede pasar por cada nodo. ¿Cómo adaptaría la red para poder resolver el problema usando el algoritmo de Ford y Fulkerson? Explique y resuelva en el siguiente ejemplo (muestre la red adaptada, resuelva usando FyF y explique finalmente que significa el resultado en la red original). (2 pts.).



Problema 2

1) Determine la ruta más corta del nodo 1 a todos los demás nodos para la siguiente red aplicando el algoritmo de Dijkstra: (3 pts.)



2) Si agregara un arco del nodo 3 al nodo 5 con costo 1, ¿debe aplicar todo el algoritmo nuevamente o le sirve parte de lo que hizo en el punto 1)? Resuelva nuevamente de manera eficiente. (3 pts.)

Problema 3

Considere el siguiente modelo de localización de bodegas para almacenar y distribuir un producto para un horizonte de T años. La empresa tiene 5 bodegas existentes y planea construir 3 más en los próximos 5 años.

Las bodegas existentes se definen por su ubicación perteneciente al conjunto *bodegas existentes* (BE), una capacidad anual u_i y costo de operación c_i por unidad producida. Las bodegas potenciales se definen por lugares posibles de ubicación pertenecientes al conjunto *bodegas posibles* (BP) y j alternativas tecnológicas, con costos de inversión d_i^j para cada una. Cada alternativa se caracteriza además por sus capacidades u_i^j y costos unitarios de operación c_i^j .

Desde las bodegas se abastecen K mercados, siendo d_k^t la demanda del mercado k en el año t . El transporte desde las bodegas a los mercados requiere contratos anuales con empresas fleteras. Hacer un contrato de envío directo desde la bodega i al mercado k en el periodo t tiene un costo fijo e_{ik}^t y un costo unitario de flete f_{ik}^t . Para aquellos mercados en que no se hace contrato de transporte, estos pueden ser abastecidos desde otros mercados, siendo g_{ij}^t el costo unitario de flete entre los mercados i y j en el periodo t .

Asumiendo que al principio de cada periodo todas las bodegas están llenas, plantee un modelo de programación lineal mixta para encontrar una solución de inversión en bodegas, contratos de transporte, producción y envíos, que satisfaga las demandas a costo total mínimo.

Solución:

Problema 1

- 1) Existen dos formulaciones posibles:

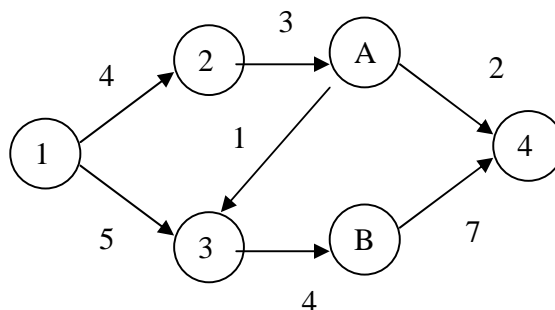
$$\sum_{(i,j)/i \in U; j \in V \setminus U} x_{ij} \geq 1 \quad \forall U \subseteq V \text{ tal que } 2 \leq |U| \leq n-2$$

$$\sum_{(i,j)/i \in U; j \in U; i \neq j} x_{ij} \leq |U| - 1 \quad \forall U \subseteq V \text{ tal que } 2 \leq |U| \leq n-2$$

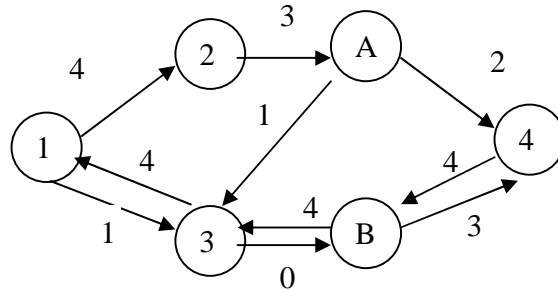
Donde U son subconjuntos de ciudades a visitar. Además se deben explicar ambas restricciones, para lo cual lo más fácil es mostrar un ejemplo con un conjunto pequeño de ciudades para ver como funcionan las restricciones. Por ejemplo para la segunda restricción, si se tienen 3 ciudades, pueden existir a lo más 2 arcos activos ($x_{ij} > 0$) entre los 3 posibles.

El poner la restricción es 1 pto y el explicarla 0,5.

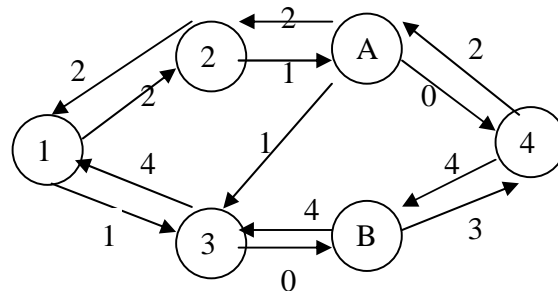
- 2) Si el óptimo de la relajación lineal es entera, luego significa que esta solución además cumple las restricciones de integralidad que fueron relajadas, por lo cual el óptimo del problema relajado es el óptimo del problema entero.
- 3) Cómo se vio en clases, para mejorar más rápido la cota de la función objetivo se debe ramificar en profundidad. Por lo mismo en las auxiliares los problemas se resolvieron de dicha manera.
- 4) Se crean dos nodos artificiales como se muestra en la figura, y luego se resuelve como cualquier problema de F-F.



Partimos de la solución factible de flujo 0, y eligiendo el camino 1-3-b-4 con flujo máximo 4, el grafo auxiliar queda



Elegimos el camino 1-2-a-4 con flujo máximo 2, se tiene

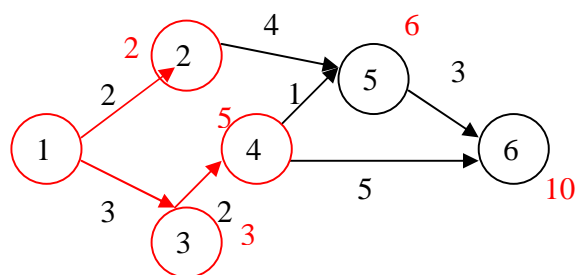
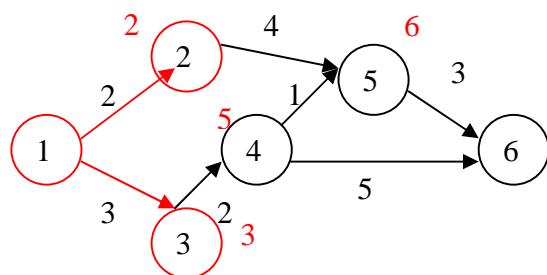
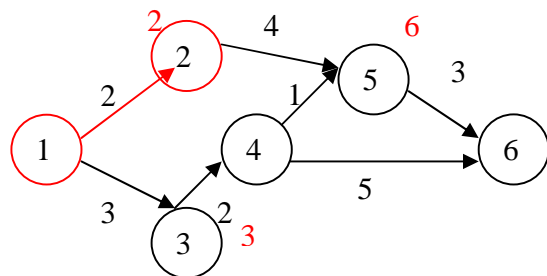
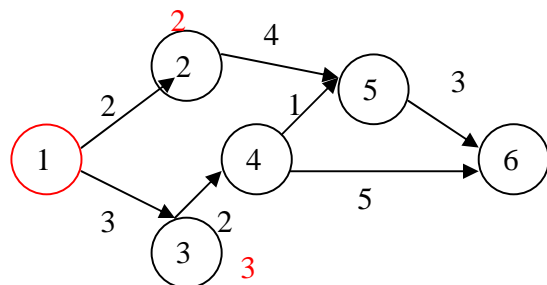


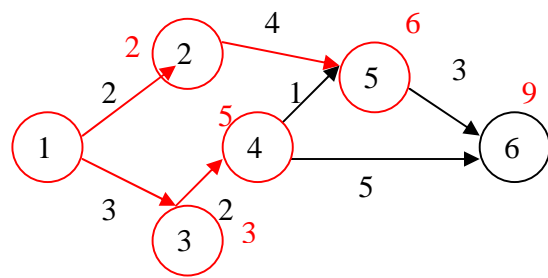
Dado que no existen nuevos caminos, hemos llegado al óptimo, lo cual en la red original corresponde a los siguientes flujos:

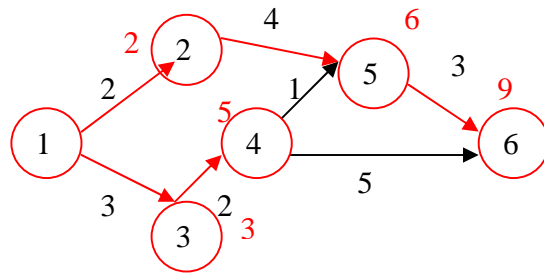
Arco	Flujo
1-2	2
1-3	4
2-3	0
2-4	2
3-4	4

Problema 2

1)







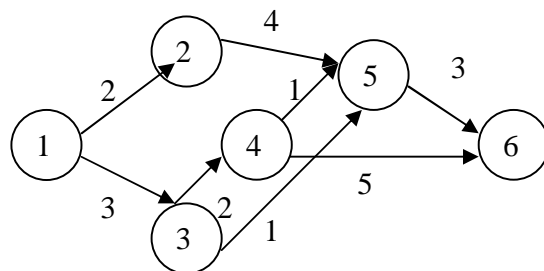
Notar que en la penúltima figura se elige 2-5 en vez de 4-5 pese a que ambos caminos tienen el mismo “costo acumulado”. Esto es porque en la segunda figura se determinó $\pi(5)=6$ con $P(5)=2$.

Llegar a la solución: 2,5

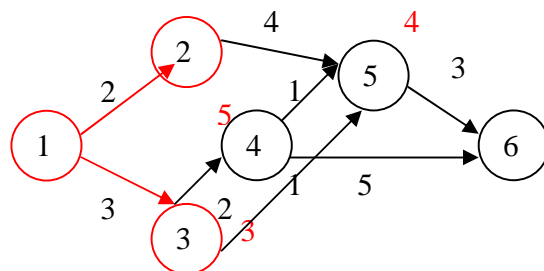
Argumentar lo anterior: 0,5

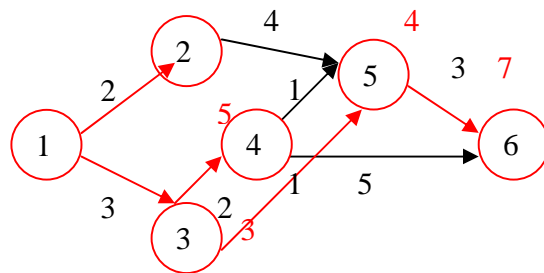
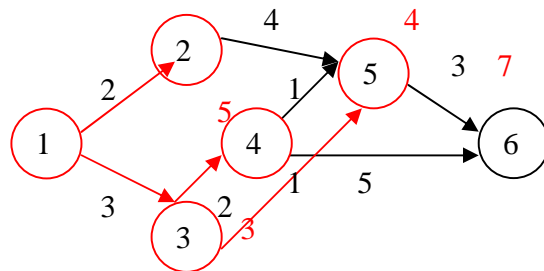
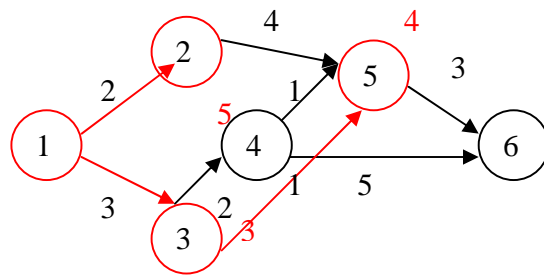
2)

El caso es el siguiente



Si como se agrega un arco que parte de 3, nos sirve todo lo anterior hasta cuando se agrega el nodo 3 al conjunto S. (1 punto)





Problema 3

Debido a que hay alumnos que pudieron entender que aquellos mercados que se abastecían mediante contrato, no podían abastecerse mediante otros mercados, luego no se puede bajar por poner más restricciones. Por lo mismo, a continuación se expone la solución más básica para alcanzar el total del puntaje (poner restricciones adicionales no entrega puntaje extra).

Variables mixtas (1 punto)

$$X_{ijt} = \begin{cases} 1 & \text{si construyo bodega en } i \text{ con tecnología } j \text{ en el periodo } t \\ 0 & \text{~} \end{cases}$$

Y_{ik}^t = Flujo de productos entre la bodega i y el mercado k .

Y'_{ek}^t = Flujo de productos entre el mercado e y el mercado k .

$$Z_{ikt} = \begin{cases} 1 & \text{Si contrato transporte entre la bodega } i \text{ y el mercado } k \text{ en el periodo } t \\ 0 & \text{~} \end{cases}$$

Y_{ijk}^t = Flujo de productos desde la bodega i con tecnología j hacia el mercado k en el periodo t

Restricciones (4 puntos)

Notación: BE: Bodegas existentes, BP: Bodegas posibles.

1. Satisfacción de demanda (1 punto)

$$\sum_{i \in BE} Y_{ik}^t + \sum_{i \in BP} \sum_j Y_{ijk}^t + \sum_{e \neq k} Y_{ek}^t = d_{kt} + \sum_{e \neq k} Y_{ke}^t \quad \forall k \forall t$$

2. Capacidad bodegas (1 punto)

$$\sum_k Y_{ik}^t \leq u_i \quad \forall i \in BE, \forall t$$

$$\sum_k Y_{ijk}^t \leq u_i^j \left(\sum_{a=1}^t x_{ija} \right) \quad \forall i \in BE, \forall j, \forall t$$

3. Relación entre contratos y flujos hacia mercados (0,5 puntos)

$$Y_{ik}^t \leq M * Z_{ikt} \quad \forall i \in BE, \forall k, \forall t$$

$$\sum_j Y_{ijk}^t \leq M * Z_{ikt} \quad \forall i \in BP, \forall k, \forall t$$

4. Selección de a lo más 1 bodega por localización potencial (0,5 puntos)

$$\sum_j \sum_t x_{ij}^t \leq 1 \quad \forall i \in BP$$

5. Construir 3 bodegas en los 5 primeros años (0,5 puntos)

$$\sum_t \sum_{i \in BP} \sum_j x_{ij}^t = 3$$

6. Naturaleza de las variables (0,5 puntos)

(Se deben explicitar)

Función objetivo (1 punto)

Min:

$$\sum_{i,j,t} x_{ijt} d_i^j + \sum_{i,k,t} z_{ikt} * e_{ikt} + \sum_{i,k,t} Y_{ikt} (f_{ikt} + c_i) + \sum_{i,k,j,t} Y_{ijk}^t (f_{ikt} + c_i^j) + \sum_{t,k,e \neq k} Y_{ke}^t * g_{ke}^t$$