

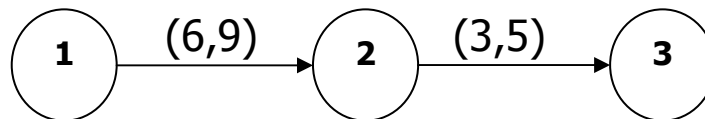


### Control N°3 Miércoles 3 de Noviembre de 2004

#### Pregunta 1

i) Suponga que tiene que resolver un problema de programación lineal y un problema de programación lineal entera. Si no tiene más información que esa, ¿cuál diría que es más difícil de resolver? Justifique la respuesta.

ii) Sea la red de la figura con las capacidades mínimas y máximas de cada arco dadas:



Usar el algoritmo auxiliar de Ford y Fulkerson para mostrar que no puede haber flujo inicial factible.

iii) ¿Cómo adaptaría una red dada para poder aplicar el algoritmo de Dijkstra si le piden que encuentre las rutas más cortas desde todos los nodos hasta el nodo inicial?

#### Pregunta 2

La Industria "Cachimba" necesita programar su producción, consistente en  $N$  diferentes productos. Para ellos se utilizan  $M$  insumos diferentes (en total). Se sabe que  $a_{ij}$  unidades es la cantidad del insumo  $i$  ( $i=1, \dots, M$ ) necesaria para producir una unidad del producto  $j$ . ( $j=1, \dots, N$ ). El precio unitario de venta del producto  $j$  es  $P_j$ .

La Industria debe comprar los insumos, sabiendo que la cantidad máxima que puede comprar del insumo  $i$  es  $b_i$  unidades y que el costo unitario del insumo  $i$  es  $c_i$ .

Se sabe además que existe un proceso principal, que es necesario para fabricar el producto. Se tienen 2 alternativas para éste: el proceso  $p$  o el proceso  $q$ . Es decir, es obligatorio el uso de uno sólo de éstos, para cada producto. Si se usa el proceso  $p$  se

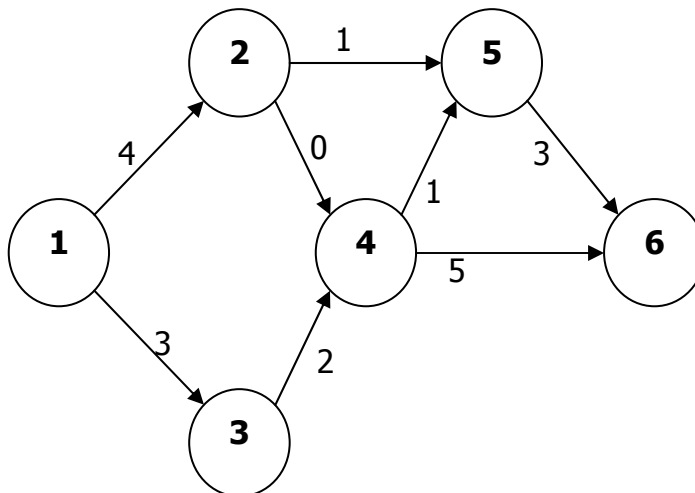
incurre en un costo fijo  $k_p$  por producir. Si se usa el proceso  $q$  se incurre en un costo fijo  $k_q$  por producir.

Plantee un modelo de Programación Lineal Entera que permita determinar si se usa el proceso  $p$  o el proceso  $q$  y qué cantidad de cada insumo debe comprar, así como que cantidad de producto se debe (puede) fabricar de tal manera de maximizar el beneficio.

**Bonus (0,5 ptos):** ¿Qué pasaría si el precio de los insumos aumenta si se compran más de  $Q^*$  unidades ( $Q^*$  es menor q  $b_i$  para todo  $i$ ) de  $c_i$  a  $l_i$ ? ¿Qué variables, restricciones y cambios en la función objetivo debería agregar?

### Pregunta 3

Dado el siguiente grafo:



- Determinar la ruta más corta del nodo 1 a todos los demás para la red **aplicando el algoritmo de Dijkstra**, explique claramente los pasos que sigue para decidir el camino.
- Mostrar el árbol de rutas más cortas que queda determinado.
- Si agregara un arco del nodo 2 al nodo 6 con peso 2, que parte de lo que resolvió en (a) le sirve para la nueva red? Resuelva usando Dijkstra para esta nueva situación.

**Pauta Control 3**  
**IN34A**  
**3 de Noviembre de 2004**

**Pregunta 1**

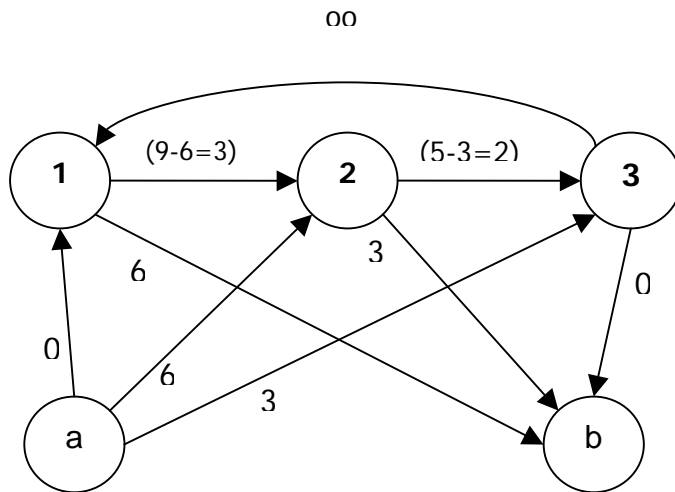
i) El problema entero debería ser más difícil, ya que es NP-completo, mientras que el PPL es polinomial (P).

ii) Armar la red auxiliar dada en clases (llamada Fase I de Ford y Fulkerson) y ver que el flujo máximo de esa nueva red no satura todos los arcos que salen del nuevo nodo inicial, y, por lo tanto, no hay flujo inicial factible en la red original. Tienen que aplicar F y F completo a la red auxiliar.

En la nueva red, se agregan los nodos a y b como inicial y final, las cuotas inferiores son 0 y las superiores son:

$$u_{ij}^* = u_{ij} - l_{ij} \quad ; \quad u_{ai}^* = \sum_k l_{ki} \quad ; \quad u_{ib}^* = \sum_k l_{ik}$$

Luego la red queda:



Así, con F y F se busca el flujo máximo de (a) a (b). Si  $F^*$  es menor que la sumatoria de las cotas inferiores originales, NO EXISTE FLUJO FACTIBLE.

Deben hacer F y F completo en la red auxiliar.

iii) Invertir el sentido de las flechas, aplicar Dijkstra para obtener el camino más corto desde el nodo inicial a cada nodo, y volver a invertir para obtener el resultado.

**Pregunta 2**

Variables

$X_{kj}$ : 1 si el producto j se produce con el proceso k.  $k = p, q; j = 1, \dots, N$

(Puede ser  $X_j$ : 1 si se produce j con proceso p, 0 con q (ó al revés), y se reemplaza uno de los  $X_{kj}$  por  $1-X_j$ )

$Q_j$ : cantidad del producto j que se produce.  $j = 1, \dots, N$

(También es válido  $Q_{pj}$  y  $Q_{qj}$ , pero deben agregar la restricción  $Q_{kj} \leq M \cdot X_{kj} \quad \forall k, j$  y cambiar  $Q_j$  por  $Q_{pj} + Q_{qj}$ )

(También pueden haber agregado la variable  $Z_i$  como la cantidad de insumo que se compra, pero esta definida por  $\sum_j a_{ij} \cdot Q_j$ )

### Restricciones

*Disponibilidad de recursos:*

$$\sum_j a_{ij} \cdot Q_j \leq b_i \quad \forall i$$

*Utilización de sólo un proceso:*

$$X_{pj} + X_{qj} = 1 \quad \forall j$$

*Naturaleza de las Variables:*

$$X_{pj}, X_{qj} \in \{0,1\}$$

$$Q_{pj}, Q_{qj} \geq 0$$

F.O.

$$\text{Max } Z = \sum_j \left( P_j \cdot Q_j - k_p \cdot X_{pj} - k_q \cdot X_{qj} - \sum_i a_{ij} \cdot c_i \cdot Q_j \right)$$

Observación: Lo correcto hubiera sido (en el enunciado) que  $k_p$  fuera, más bien,  $k_{pj}$ , pues así, el modelo decide según lo que conviene más para cada producto. (Tal cual está, todos los productos se hacen con el proceso con menor  $k$ )

Bonus:

Se agregan las variables  $\partial_i = 1$  si se pasa  $Q^*$ , 0 si no.

$$z_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \partial_i \text{ es } 0 \\ \sum_j a_{ij} \cdot Q_j - Q^* & \text{si no} \end{cases}$$

Las restricciones extras son:  $\partial_i \geq \frac{\sum_j a_{ij} \cdot Q_j - Q^*}{M'} \quad M' \ll Q^*$

$$\partial_i - 1 \leq \frac{\sum_j a_{ij} \cdot Q_j - Q^*}{M'} \quad M' \ll Q^*$$

$$z_i \leq M'' \cdot \partial_i \quad M'' \ll Q^*$$

$$\sum_j a_{ij} \cdot Q_j - z_i \leq Q^* \cdot \partial_i + M''' \cdot (1 - \partial_i) \quad \forall i; M''' \ll Q^*$$

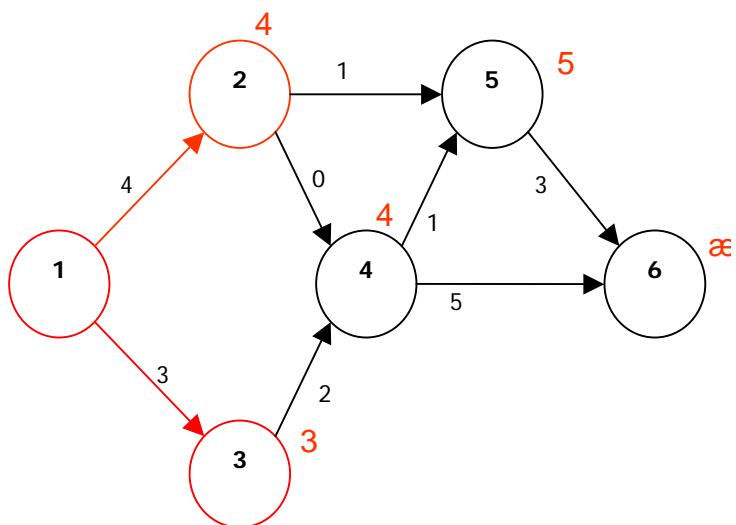
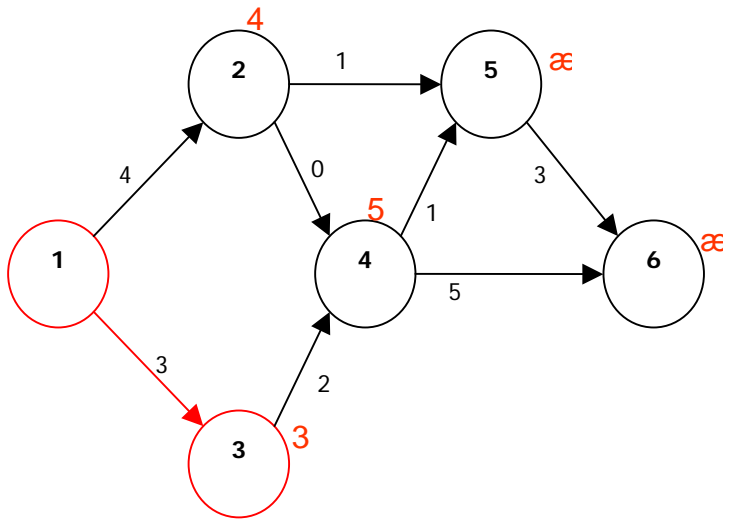
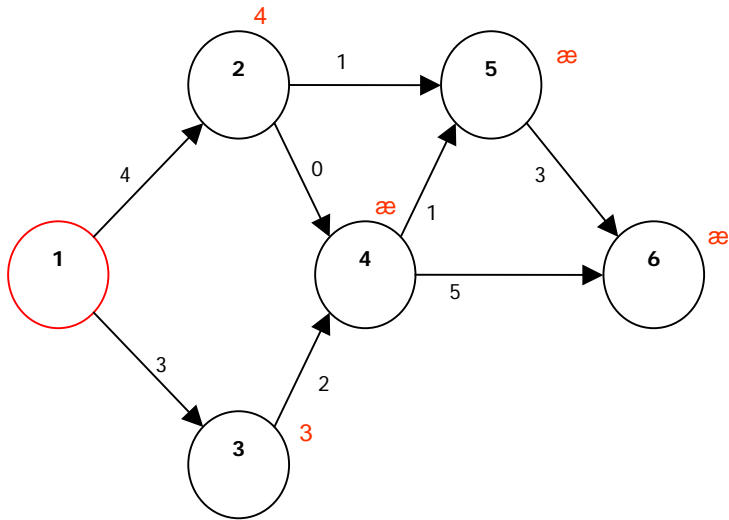
Y en la función objetivo se agrega como costo:

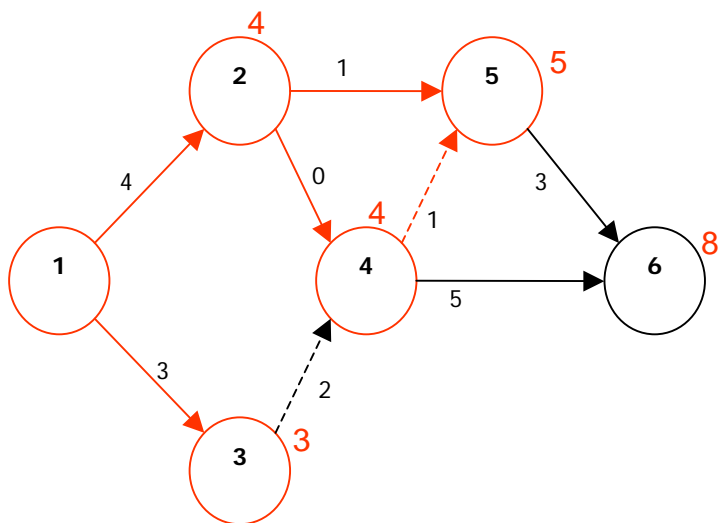
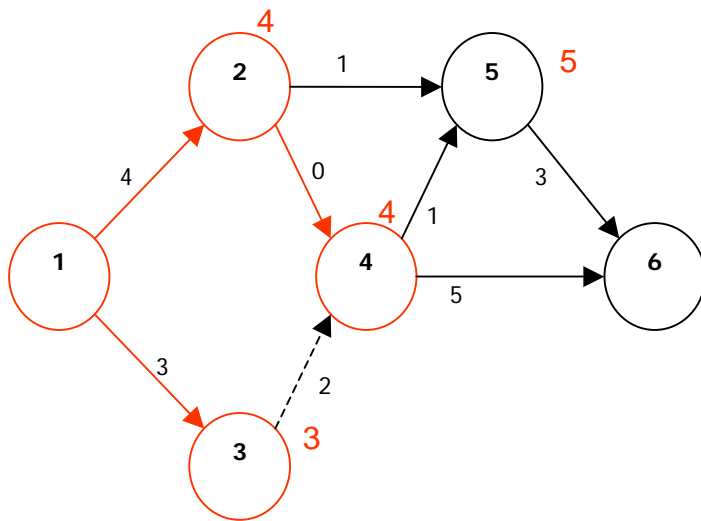
$$-\sum_i z_i \cdot (c_i - l_i) \quad \text{que es el diferencial de los productos sobre}$$

$Q^*$ .

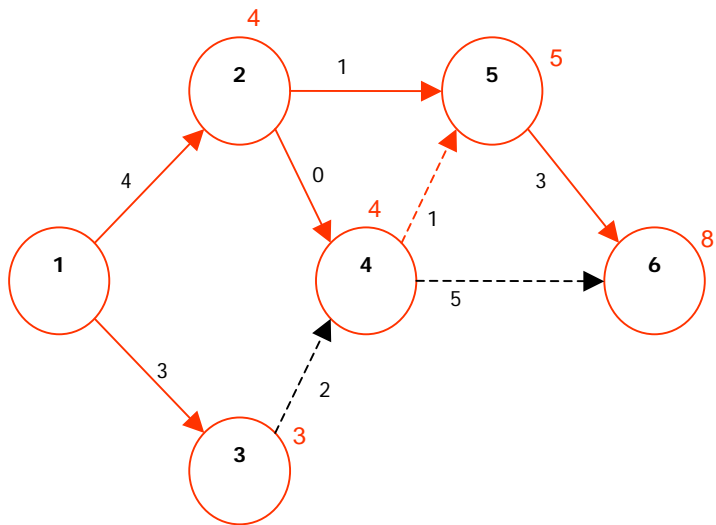
### Pregunta 3

- a) Los pasos son los siguientes, pero deben justificar que elijen el camino según el menor costo acumulado:

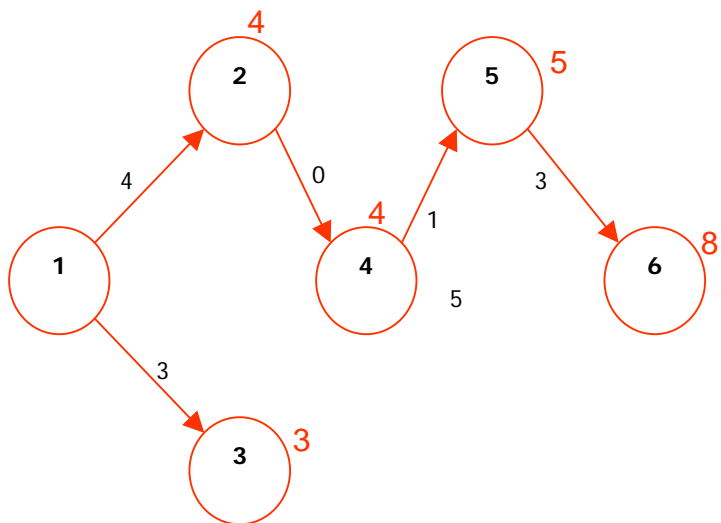
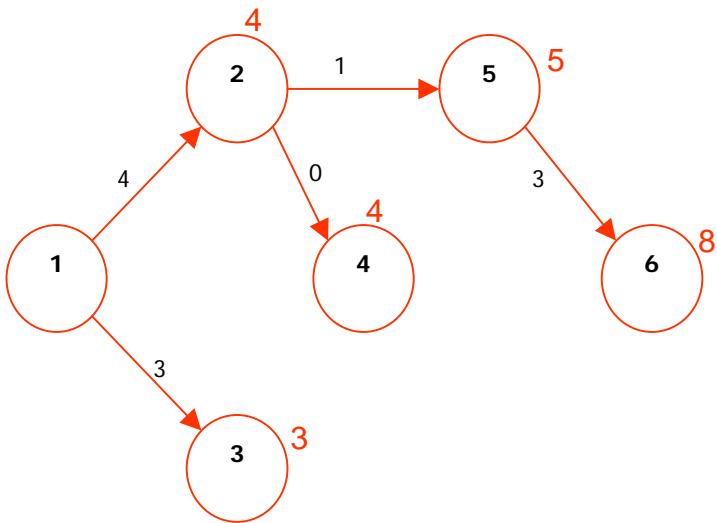




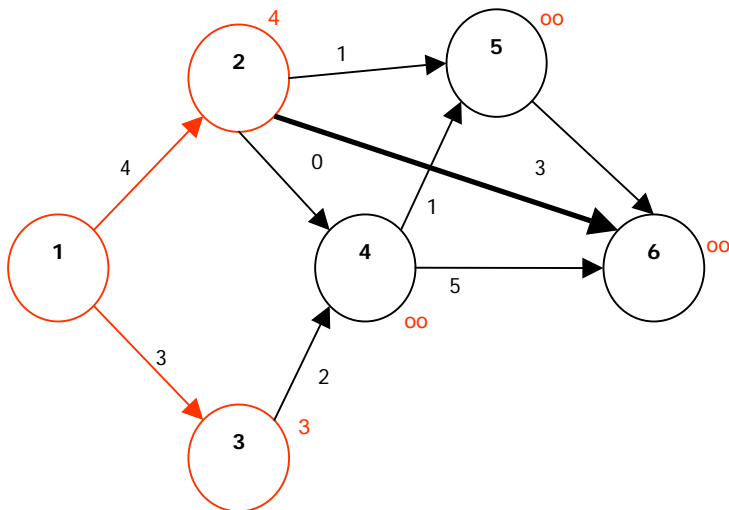
tanto (4,5) como (2,5) son optimos. tanto (4,5) como (2,5) son optimos, pero siguiendo el criterio de Dijkstra, solo (2,5) es optimo (pues el costo de 5 no se modifica). Si se usa 4,5 como optimo no tiene todo el puntaje.



b) hay dos posibles soluciones, pero solo la primera es optima de Dijkstra:



c) El árbol original es modificado, y se empieza en el 3<sup>er</sup> paso:



Finalmente, el resultado es:

