

Control 3

Miércoles 5 de Noviembre, 2003

Problema 1

1. Sea el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & -8X_1 - X_2 \\ \text{s.a.} & \\ & -X_1 + 4X_2 \geq 4 \\ & 2X_1 + 2X_2 \leq 8 \\ & X_1 + 2X_2 \leq 6 \\ & X_2 \geq 0 \end{array}$$

- a) (0,5 ptos.) Grafique y obtenga el óptimo.
 b) (1,5 ptos.) Formule el dual y obtenga el óptimo en forma analítica (no use SIMPLEX ni grafique).
2. Dado el problema primal

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & z = cx \\ \text{s.a.} & \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

- a) (2,0 ptos.) Demuestre que si el problema primal es no acotado entonces el dual debe ser infactible.
 b) (2,0 ptos.) Puede pasar que ambos problemas (primal - dual) sean infactibles? Justifique.

Problema 2

Considere el siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & Z = 4X_1 + 2X_2 + 3X_3 \\ \text{s.a.} & \\ & \frac{5}{17}X_1 - \frac{14}{17}X_2 - \frac{1}{17}X_3 \leq \frac{35}{17} \\ & \frac{2}{17}X_1 + \frac{8}{17}X_2 + \frac{3}{17}X_3 \leq \frac{31}{17} \\ & X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{array}$$

Este problema se ha resuelto como minimización y su forma canónica óptima es la siguiente

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & Z = 47 - 2X_2 - 6X_4 - 19X_5 \\ \text{s.a.} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} X_1 & - & 2X_2 & & & + & 3X_4 & + & X_5 & = & 8 \\ & & + & 4X_2 & + & X_3 & - & 2X_4 & + & 5X_5 & = & 5 \end{array}$$

Además se sabe que la matriz básica en el óptimo es tal que:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Con estos antecedentes responda las siguientes preguntas:

1. (3,0 ptos.) Suponga que $c_1 = 4$ cambia a $c'_1 = 3$. Analice si cambia o no la solución óptima del problema. En caso afirmativo encuentre la nueva solución óptima.
Determine además si cambia o no el vector de precios sombra (π). En caso afirmativo encuentre sus nuevos valores.
2. (3,0 ptos.) Suponga que $b_1 = \frac{35}{17}$ se cambia a $b'_1 = 1$. Analice si cambia o no la solución óptima. En caso afirmativo encuentre la nueva solución óptima.
Determine además el rango de variación de b_1 para que los precios sombra se mantengan.

Problema 3

Una empresa forestal del sur de Chile debe elaborar su plan de producción de mediano plazo por lo que le ha decidido contratar a la consultora Catalan & Mandinga s.a. Los datos entregados a la consultora son los siguientes:

El horizonte de planificación considera T años y las decisiones de producción deben ser presentadas en formato de planes de producción anuales. La empresa cuenta con N Bosques y cada bosque esta dividido en predios. Considere que en el predio i existen A_i árboles y que el conjunto P_n contiene a los predios que pertenecen al bosque n .

Las posibles estrategias de producción deben considerar el crecimiento y reforestación de los predios talados. Si un predio cuenta con una altura media (de los árboles) de X mts. al comienzo de un año, al comienzo del próximo la altura media será $(X \cdot 1,2 + 5)$ mts. De esta forma si un predio es talado durante un período, al comienzo del próximo año su altura media será 5 mts. Considere que la altura media del predio i al comienzo del año 1 es H_i .

La producción de maderá ya ha sido comprometida por lo que el año t cuenta con una demanda de D_t mts³ de madera (considere que el tronco del árbol promedio tiene un diámetro de d mts.).

El plan de producción debe considerar que si se decide talar un predio en un período en particular la totalidad de sus árboles deben ser talados.

En otro plano operacional el acceso al predio i requiere la construcción de un conjunto C_i tramos de camino, por donde se transportará la madera, siendo C el conjunto total de tramos caminos, con $C_i \subset C$.

El costo de talar un árbol del bosque n durante el período t es T_n^t . El costo de construir el camino j en el período t es M_j^t . Además existe un costo fijo de operación F_n en el bosque n , es decir, si en un período se decide talar algún predio del bosque n , se debe pagar un monto F_n .

Por restricciones de adyacencia, en caso de efectuarse operaciones en el predio i , no se podrán realizar operaciones en los predios vecinos. El conjunto de predios vecinos al predio i esta dado por V_i .

Por motivo de la legislación ambiental vigente un predio no puede ser talado si su altura media es inferior a L mts. Además no se puede permitir que la altura media de algún predio este más de W años sin ser talado.

Construya un modelo de programación lineal mixta que ayude a los contratistas a decidir que predios deben ser talados cada año, y que caminos deben ser construidos cada año, de manera de minimizar los costos de operación.

IN34A: OPTIMIZACIÓN

Pauta pregunta I

$$\text{mín } z = -8x_1 - x_2$$

s.a.

$$-x_1 + 4x_2 \geq 4$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_2 \geq 0$$

a) Gráfico:

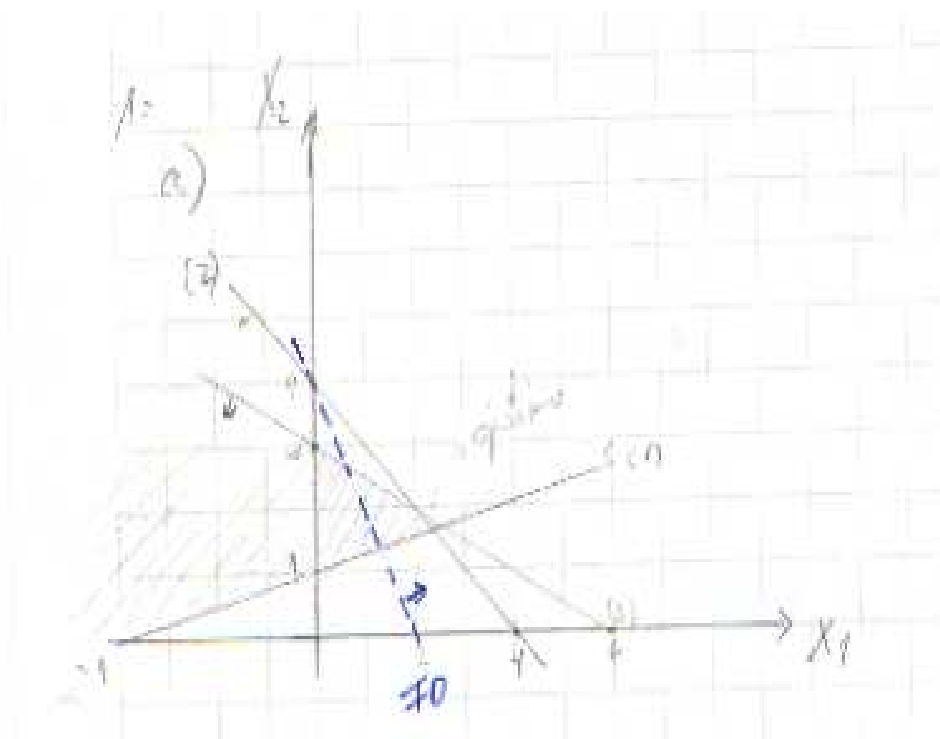


Figura 1: Grafico asociado al problema .

de el gráfico se ve que las restricciones activas son 1 y 2, esto implica:

$$\begin{array}{l} s.a. \\ -x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \end{array}$$

de donde se llega a los siguientes valores:

$$\begin{array}{l} x_2 = 8/5 = 1,6 \\ x_1 = 12/5 = 2,4 \end{array}$$

por lo tanto el optimo es:

$$\vec{x}^* = (1,6; 2,4)$$

esto implica que el optimo es:

$$z^* = -8 \cdot 12/5 - 8/5 = -20,8$$

b) el problema dual queda de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} \text{máx } w = 4y_1 + 8y_2 + 6y_3 \\ s.a. \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 = -8 \\ 4y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq -1 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2, y_3 \leq 0 \end{array}$$

como tenemos el valor optimo en el problema primal, y sabemos que la restriccion 3 no es activa, entonces por el teorema de holgura complementaria se tiene que

$$y_3 = 0$$

pues:

$$(A_3 \cdot X - b_3) \cdot y_3 = 0$$

y como la restriccion no es activa, y3 debe ser cero. Ademas se sabe que x1 y x2 son positivas, por lo que las restricciones asociadas a estas variables son activas, esto implica:

$$\begin{array}{l} -y_1 + 2y_2 = -8 \\ 4y_1 + 2y_2 = -1 \end{array}$$

de donde se llega a los siguientes valores:

$$\begin{array}{l} y_1 = 7/5 = 1,4 \\ y_2 = 12/5 = -3,3 \end{array}$$

esto implica que el valor optimo para el dual es:

$$w^* = -20,8$$

que es lo que uno esperaria, pues el dual y el primal en el optimo deben ser iguales.

2.- a) Por el teorema debil de dualidad se tiene que:

$$z(\bar{x}) \leq w(\bar{y}) \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \text{ factibles}$$

por lo tanto si el primal es no acotado, $\lim_{\bar{x} \rightarrow x^*} z(\bar{x}) = \infty$ por lo que el espacio factible para el dual queda vacio, pues $\nexists \bar{y}$ tal que $\infty \leq w(\bar{y})$ (la demostracion del teorema debil de dualidad no es necesaria).

b) si puede ocurrir, y esto se puede ver en el siguiente ejemplo:

$$\text{mín } z = x_1 - x_2$$

s.a.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \geq & 1 \\ x_1 + x_2 & \leq & -1 \\ x_1 & \leq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

y el dual quedaria:

$$\text{mín } z = y_1 - y_2$$

s.a.

$$\begin{array}{rcl} y_1 + y_2 & \geq & 1 \\ y_1 + y_2 & \leq & -1 \\ y_1 & \geq & 0 \\ y_2 & \leq & 0 \end{array}$$

Es claro que pueden haber muchos ejemplos, hay que fijarse que realmente sean ambos infactibles, y tambien pueden haber demostraciones analiticas

Dudas, consultas y comentarios a:
frcister@mi.cl

Control 3

Miércoles 5 de Noviembre, 2003

Problema 2

Problema:

$$\begin{aligned} \text{máx } Z &= 4X_1 + 2X_2 + 3X_3 \\ \text{s.a :} \quad & \begin{aligned} \frac{5}{17}X_1 - \frac{14}{17}X_2 - \frac{1}{17}X_3 &\leq \frac{35}{17} \\ \frac{2}{17}X_1 - \frac{8}{17}X_2 + \frac{3}{17}X_3 &\leq \frac{31}{17} \\ X_1, X_2, X_3 &\geq 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

Este problema se ha resuelto como minimización y su forma canónica óptima es la siguiente:

$$\begin{aligned} \text{máx } Z &= 47 - 2X_2 - 6X_4 - 19X_5 \\ \text{s.a :} \quad & \begin{aligned} X_1 - 2X_2 + 3X_4 + X_5 &= 8 \\ +4X_2 + X_3 - 2X_4 + X_5 &= 5 \end{aligned} \end{aligned}$$

Además se sabe que la matriz básica en el óptimo es tal que:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Con estos antecedentes se pide responder:

- Suponga que $c_1 = 4$ se cambia a $c'_1 = 3$. Analice si cambia o no la solución óptima del problema. En caso afirmativo encuentre la nueva solución óptima. Determine además si cambia o no el vector de precios sombra (π). En caso afirmativo encuentre los valores.

Solución: La forma canónica nos entrega las variables básicas del problema primal, que son aquellas que tienen costo reducido igual a 0. En este caso son las variables X_1 y X_3 . Otra forma de darse cuenta de esto, si no se entiende la forma canónica, es invirtiendo la matriz B^{-1} , obteniendo B , que corresponde a las columnas de la matriz A de las variables bsicas del problema original.

Entonces al cambiar c_1 estamos cambiando el costo de un avariable básica. Luego hay que verificar si se sigue cumpliendo el criterio de óptimalidad para las variables no básicas. Esto es que $\bar{c}_j \leq 0 \forall j$ no básico, ya que el primal es un pronlema de maximizacion

Los nuevos costos modificados serán (sobre las variables no básicas X_2, X_4, X_5):

$$\begin{aligned} \bar{c}_j &= c_j - c_B B^{*-1} A_{\bullet j} \\ \bar{c}_2 &= c_2 - c_B B^{*-1} A_{\bullet 2} = -2 - \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-14}{17} \\ \frac{8}{17} \end{pmatrix} = -8 \leq 0 \\ \bar{c}_4 &= c_4 - c_B B^{*-1} A_{\bullet 4} = 0 - \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -3 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\bar{c}_5 = c_5 - c_B B^{*-1} A_{\bullet 5} = 0 - \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -18 \leq 0$$

Luego, a pesar del cambio que se produce en el costo asociado a la variable básica X_2 , el óptimo sigue manteniéndose, para el problema.

El vector de precios sombra se cambia. Este nuevo vector es:

$$\pi_i = c_B B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \end{pmatrix}$$

2. Suponga que $b_1 = \frac{35}{17}$ se cambia por $b'_1 = 1$ analice si cambia o no la solución óptima. En caso afirmativo encuentre la nueva solución óptima.
Determine además el rango de variación de b_1 para que los precios sombra se mantengan.

Solución: La solución óptima si cambia a:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{31}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{82}{17} \\ \frac{121}{17} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sabemos que los precios sombras pueden ser calculados como $y^* = \pi^* = c_B B^{*-1}$. Como en este caso no se está modificando ningún costo del problema original, la única forma en que el valor de algún precio sombra puede variar es cambiando la base óptima. Para asegurar que seguimos estando en el mismo óptimo, y entonces no cambia la base, solamente se necesita asegurar que seguimos estando en un punto factible en el problema primal, lo cual se asegura haciendo que $\bar{b} = B^{-1}b$ cumpla con la condición de naturaleza de variables explicitada en el problema, las que en este caso corresponde a $x_j \geq 0$ para todo j .

Ahora, veamos cual es el rango en que puede variar b_1 para que sigamos estando en el mismo óptimo:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \frac{31}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b_1 + \frac{31}{17} \\ -2b_1 + \frac{155}{17} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, el rango de variación de b_1 para que no cambie la base óptima es $b_1 \in \left[\frac{-31}{51}, \frac{155}{34} \right]$



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A: Optimización
Profs: P. Conca, G. Duran, D. Sauré
Aux : B. Duarte, F. Cisternas, S. Souyris
J. Muñoz, M. Quinteros, G. Medina

Control 3

Miércoles 5 de Noviembre, 2003

Problema 3

- Variables de decisión:

$$w_n^t = \begin{cases} 1 & \text{si se tala algún predio del bosque } n \text{ en el período } t \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$z_i^t = \begin{cases} 1 & \text{si se tala el predio } i \text{ en el período } t \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$y_j^t = \begin{cases} 1 & \text{si se construye el camino } j \text{ en el período } t \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$x_i^t = \text{altura talada del predio } i \text{ en el período } t$$

$$h_i^t = \text{altura del predio } i \text{ al comienzo del período } t$$

- Función objetivo:

$$\min \left\{ \sum_{t=1}^T \left[\sum_{n=1}^N F_n \cdot w_n^t + \sum_{n=1}^N \sum_{i \in P_n} z_i^t \cdot T_n^t \cdot A_i + \sum_{j \in C} y_j^t \cdot M_j^t \right] \right\}$$

- Restricciones:

- Satisfacer demanda:

$$\sum_i x_i^t \cdot \frac{d^2}{4} \cdot \pi \cdot A_i \geq D_t \quad \forall t$$

- Construir caminos para poder talar predios:

$$z_i^t \leq \sum_{u=1}^t y_j^u \quad \forall j \in C_i \quad \forall t$$

- Adyacencia de las operaciones:

$$z_k^t \leq 1 - z_i^t \quad \forall k \in V_i \quad \forall t$$

- Mínima altura de tala:

$$x_i^t \geq L - M \cdot (1 - z_i^t) \quad \forall i \quad \forall t$$

- máxima cantidad de años sin talar:

1- Si pensaron la restricción como cota de años:

$$\sum_{u=t-W+1}^t z_i^u \geq 1 \quad \forall t \geq W \quad \forall i$$

o

$$x_i^t \leq Q \quad \forall i \quad \forall t$$

donde $Q = Q_W$ y $Q_k = 1,2 \cdot Q_{k-1} + 5$ con $Q_0 = 5$.

2- Si pensaron la restricción como cota de altura:

$$x_i^t \leq W \quad \forall i \quad \forall t$$

- Crecimiento de las alturas medias:

$$h_i^{t+1} = (h_i^t - x_i^t) \cdot 1,2 + 5 \quad \forall i \quad \forall t$$

- Si talo, talo toda la altura:

$$x_i^t \geq h_i^t - (1 - z_i^t) \cdot M \quad \forall i \quad \forall t$$

$$x_i^t \leq h_i^t \quad \forall i \quad \forall t$$

- Alturas iniciales:

$$h_i^1 = H_i \quad \forall i$$

- Naturaleza de las variables:

$$z_i^t, w_n^t, y_j^t \in \{0, 1\}$$

$$x_i^t, h_i^t \geq 0$$