



Control 3
31 de Octubre de 2007

Pregunta 1

1. (1.5 Ptos.) Si antes de comenzar a resolver un problema entero con Branch & Bound usted conociera alguna solución entera factible. ¿Cómo podría aprovechar esta información para hacer más eficiente el algoritmo?
2. (1.5 Ptos.) Se plantea la siguiente formulación del problema del vendedor viajero. Sea $x_{ij} = 1$ si el vendedor viaja desde i a j y $x_{ij} = 0$ en caso contrario. Sea t_i la posición de la ciudad i en el *tour* formado por las variables x_{ij} .

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a.} & \sum_{j=1, j \neq i}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1, i \neq j}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n \\ & t_i - t_j + n x_{ij} \leq n - 1 \quad i \neq j; i = 2, \dots, n; j = 2, \dots, n \\ & t_i \leq n - 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \\ & t_1 = 0 \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n \\ & t_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \end{array}$$

Justifique si la anterior es una formulación válida para el problema del vendedor viajero. En particular comente si el conjunto de restricciones elimina la posibilidad de *subtours*.

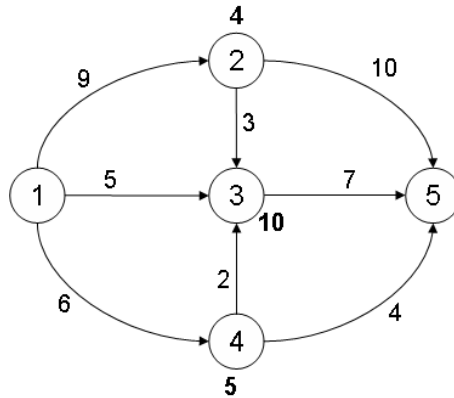
3. (1.5 Ptos.) El conjunto de hombres inscritos en una agencia de citas es H y el de mujeres es M . La agencia ha hecho un test a cada inscrito con el que ha determinado todos los pares de hombres y mujeres que son compatibles para formar una pareja (no hay parejas entre hombre ni entre mujeres). Considere que $A = \{(i, j) / i \in H, j \in M, i \text{ y } j \text{ son compatibles}\}$ es el conjunto de parejas compatibles. Cada hombre y cada mujer puede tener a lo más una pareja. La agencia desea determinar cuál es el número máximo de parejas que puede formar. Explique como podría resolver este problema como un problema de flujo máximo.

Hint: Construya un grafo al que pueda aplicar el problema de flujo máximo.

4. (1.5 Ptos.) Para el problema que resolvió en la Tarea 3. ¿Cuál es la función objetivo? Explique claramente las variables utilizadas, y la restricción que permite no tener sobreproducción cuando existe demanda insatisfecha y viceversa (considere que no se acumula la sobreproducción del periodo anterior).

Pregunta 2

1. Considere la siguiente red en que además de capacidades máximas de flujo en cada arco, existen capacidades máximas de flujo que puede pasar por cada nodo. Se desea encontrar el flujo máximo que puede ser enviado desde el nodo 1 al nodo 5.



- (3 Ptos.) Modifique la red para poder encontrar el flujo máximo de 1 a 5 aplicando el algoritmo de Ford y Fulkerson. Resuelva y determine el flujo máximo.
- (1 Ptos.) Encuentre un corte de capacidad mínima. Si tuviera que invertir en aumentar la capacidad máxima de un arco y de un nodo. ¿En qué arco y en qué nodo recomendaría invertir? Justifique.

2. (2 ptos.) Considere el siguiente problema de programación lineal.

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \text{mín} \quad z = -x_1 - x_2 \\
 & \text{s.a.} \\
 & 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 24 \\
 & 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 24 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

Sabemos que la base óptima es la matriz¹ $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. ¿En qué rango se puede variar el coeficiente de la función objetivo c_1 asociado a la variable x_1 con tal que se mantenga la solución óptima de (P)?

Pregunta 3

Las empresas salmoneras, para poder producir salmones, necesitan mantener a los peces en jaulas especiales en el mar, un grupo de jaulas se llama centro de cultivo. Para esto cada empresa solicita al gobierno zonas destinadas a este tipo de labores.

Una de estas empresas, Salmones ME, desea abrir nuevos centros de cultivos en las zonas que tiene asignadas. Pero, por su alto costo, debe ir abriendo y cerrando los centros de manera ordenada, cumpliendo con la demanda al menor costo posible.

Para esto la empresa le pide que la ayude a generar un programa de apertura de centros, es decir, que ayude a la empresa a decidir cuando y que centro se debe abrir, en las zonas que tiene asignadas.

Los centros que son abiertos en estas nuevas zonas, tienen características propias distintas entre si. El centro c , tiene un costo de apertura CA_c y un costo de funcionamiento que depende de si el centro está siendo ocupado, o está en el periodo de descanso. El costo de funcionamiento base es CFB_c y cuando el centro está ocupado se debe agregar un costo de funcionamiento ocupado CFO_c .

Además cada centro tienen una capacidad de producción $CapProd_c$, que es la cantidad bio-masa (cantidad de peces multiplicados por su peso promedio) que un centro puede producir. Esta bio-masa

$${}^1B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/7 & -3/7 \\ -3/7 & 4/7 \end{pmatrix}$$

se alcanza en un periodo TO_c , que es la cantidad de periodos consecutivos que el centro debe estar ocupado para que los peces alcancen su tamaño ideal. Y también una vez que se cosecha un centro, este debe esperar un periodo de descanso antes de volver a ser utilizado TD_c .

Esta apertura de centros debe estar hecha de tal forma, que siempre se satisfaga la demanda de Salmones ME en cada periodo que está dada por Dda_t , también en unidades de bio-masa.

La cantidad de barcos requerida para abrir un centro es limitada, por lo que no es posible abrir mas de MC centros por periodo. Por lo mismo, tampoco se permite cosechar más de $MaxCos$ centros en un mismo periodo.

Por razones medio ambientales, el gobierno ha determinado que ciertos centros deben ser cerrados en algún periodo, esta información se encuentra en el parámetro $Cerrar_{ct}$, que vale 1 cuando debo cerrar el centro c en el periodo t y cero cuando no. Si un centro es cerrado, no puede ser abierto nuevamente. Adicionalmente la empresa puede decidir cerrar un centro cuando lo estime conveniente.

El costo de cerrar un centro, se asume igual al costo residual de los bienes del centro a cerrar, por lo que este costo no debe ser considerado.

Plantee un modelo de programación lineal entera que resuelva el problema de Salmones ME.



Pauta Control 3

31 de Octubre de 2007

Pregunta 1

1. Como se conoce una solución factible para el problema entero, podríamos utilizar su valor de la función objetivo (z') como incumbente inicial. Es decir, si se tratara de un problema de maximización, podríamos utilizar $\bar{z} = z'$ en lugar de $\bar{z} = -\infty$. Con esto se espera poder eliminar ramas que tienen valores en la función objetivo menores que z' desde un comienzo, pues al ramificar éstas sólo pueden empeorar. Los aumentos en eficiencia del algoritmo dependerán de la calidad de la solución inicial z' con que se cuente. (1.5 Ptos.)

2. La primera y segunda restricciones son las que permiten que el vendedor salga y entre exactamente una vez en cada ciudad. Pero estas no garantizan la prohibición de *subtours* (0.5 Ptos.).

La tercera restricción permite que cualquier conjunto de valores de x_{ij} que formen un *subtour* no sean soluciones factibles y que cualquier conjunto de valores de x_{ij} que formen un *tour* sea una solución factible. Cuando $x_{ij} = 1$ tendremos que la restricción impondrá la condición $t_j - t_i \geq 1$, lo que se cumple cuando dos ciudades son contiguas en la ruta del vendedor, y cuando $x_{ij} = 0$ la restricción impondrá la condición $t_i - t_j \geq n - 1$, que en todo caso se cumplirá.

Veamos que los *subtours* son eliminados por la tercera restricción. Consideremos cualquier secuencia cerrada de m ciudades $i \rightarrow j \rightarrow \dots \rightarrow k \rightarrow i$ que no incluye la ciudad 1 y que potencialmente representa un *subtour*. Entonces tendremos las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{rcl} t_i - t_j + nx_{ij} & \leq & n - 1 \\ t_j - t_p + nx_{jp} & \leq & n - 1 \\ t_p - \dots + nx_{p\bullet} & \leq & n - 1 \\ & \dots & \\ \dots - t_q + nx_{\bullet q} & \leq & n - 1 \\ t_q - t_k + nx_{qk} & \leq & n - 1 \\ t_k - t_i + nx_{ki} & \leq & n - 1 \end{array}$$

Sumando tendremos que:

$$n(x_{ij} + x_{jp} + \dots + x_{qk} + x_{ki}) \leq m(n - 1)$$

Si esta secuencia formara un *subtour* tendríamos que $x_{ij} = x_{jp} = \dots = x_{qk} = x_{ki} = 1$, lo que implica $mn \leq m(n - 1)$, lo que es infactible. Es decir, se debe cumplir que al menos uno de los x_{ij} de la secuencia sea cero. Luego, este conjunto de restricciones prohíbe la formación de *tours* que no incluyan la ciudad 1. La primera y segunda restricción asegura que cualquier *tour* factible incluya la ciudad 1. (1 Ptos.)

Nota: Para verificar que la formulación prohíbe la formación de *subtours*, basta verificar con algún ejemplo.

3. Sea $G = [N, A]$ un grafo tal que $N = H \cup M$. Es decir, construimos un grafo donde hombres y mujeres son los nodos y el conjunto de arcos A corresponde a las posibles parejas que se pueden formar. Para encontrar el número máximo de parejas formulando un problema de flujo máximo, agregamos un nodo inicial s y otro final t . El nuevo conjunto de nodos será $N' = N \cup \{s, t\}$.

Agregamos arcos desde s a todos los nodos en H (desde s a cada hombre). Y agregamos arcos desde cada nodo en M hasta el nodo t (desde cada mujer a t). Es decir, el nuevo conjunto de arcos es:

$$A' = A \cup \{(s, i)/i \in H\} \cup \{(j, t)/j \in M\}$$

Definamos el grafo $G' = [N', A']$ donde $l_{ij} = 0$ y $u_{ij} = 1 \ \forall (i, j) \in A'$ (es decir, definimos las capacidades mínimas y máximas de cada arco en A' como 0 y 1). Luego, podemos plantear el problema de flujo máximo sobre el grafo G' donde el nodo inicial es s y el final es t . Es decir, buscamos encontrar el máximo flujo que se puede llevar desde s a t . El flujo máximo encontrado corresponderá al número máximo de parejas que es posible formar.

Las parejas que se formen estarán dadas por los arcos en A con flujo 1. Cada hombre tendrá a lo más una pareja pues la capacidad máxima de cada arco desde s a los nodos de H es 1 y cada mujer tendrá a lo más una pareja pues la capacidad máxima de cada arco desde los nodos de M al nodo t también es 1. Pueden existir varias formas de formar las parejas pero lo que nos interesa es encontrar cual es la cantidad máxima de parejas que es posible formar. (1.5 Ptos.)

Notas:

- G es un grafo bipartito pues tenemos que H y M son una partición de los nodos de N tales que no existen aristas entre nodos de H ni entre nodos de M . Por lo tanto, encontrar la cantidad máxima de parejas que es posible formar equivale a encontrar la correspondencia máxima de G , tal como lo vimos en la auxiliar.
 - Se aceptan respuestas en las que se explique paso a paso como se debe construir G' , pero en las que no se defina formalmente los conjuntos de nodos N' y de arcos A' .
4. ■ Variables de Decisión: (0.5 Ptos.)

$$y_{bt} = \begin{cases} 1 & \text{Sí el bloque } b \text{ es extraído en el periodo } t. \\ 0 & \sim \end{cases}$$

I_{kt} = Demanda insatisfecha de mineral tipo k en el periodo t

S_{kt} = Sobreproducción de mineral tipo k en el periodo t

- Restricción: (0.5 Ptos.)

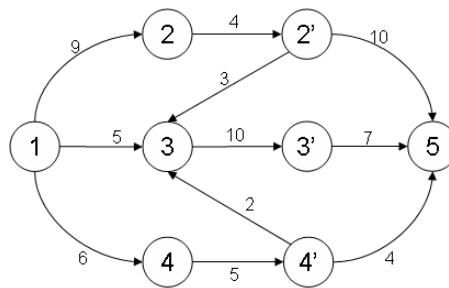
$$\sum_b r_{bk} y_{bt} + I_{kt} - S_{kt} = d_{kt} \ \forall k, t$$

- Función Objetivo: (0.5 Ptos.)

$$\text{mín} \sum_{k,t} (I_{kt} + S_{k,t})$$

Pregunta 2

1. a) El problema de flujo máximo se aplica sobre un grafo dirigido con capacidades mínimas y máximas en los arcos. En el grafo original tenemos además capacidades máximas de flujo en algunos nodos. Para construir un grafo al que podamos aplicar Ford y Fulkerson, por cada nodo con capacidad máxima agregamos otro artificial y un arco entre ellos con capacidad mínima cero y máxima igual a la capacidad del nodo original. De esta forma limitamos el flujo que pasa por cada nodo con capacidad máxima. El grafo adaptado quedaría así:

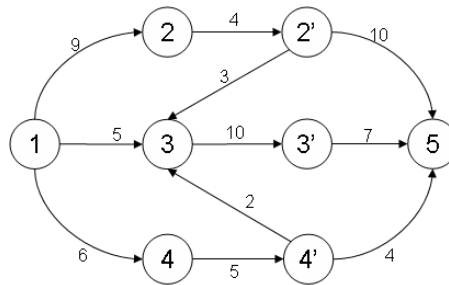


(0.8 Ptos.)

Como las capacidades mínimas son cero en todos los arcos, flujo cero en todos los arcos es una solución factible del problema de flujo máximo. (0.2 Ptos.)

Iteración 1:

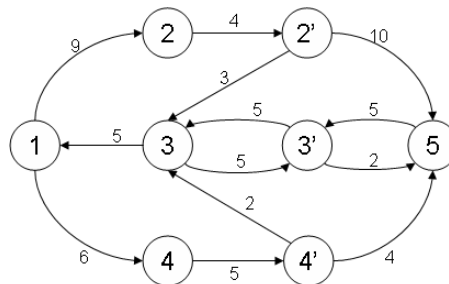
G' :



Tomando el camino $C' = 1-3-3'-5$, tenemos que $\epsilon = 5$. Los flujos que debemos actualizar son: $f_{13} = f_{33'} = f_{3'5} = 5$ y $F = 5$.

Iteración 2:

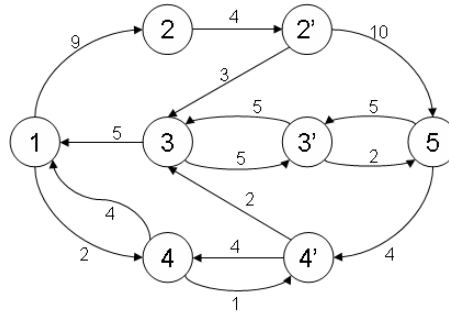
G' :



Tomando el camino $C' = 1-4-4'-5$, tenemos que $\epsilon = 4$. Los flujos que debemos actualizar son: $f_{14} = f_{44'} = f_{4'5} = 4$ y $F = 9$.

Iteración 3:

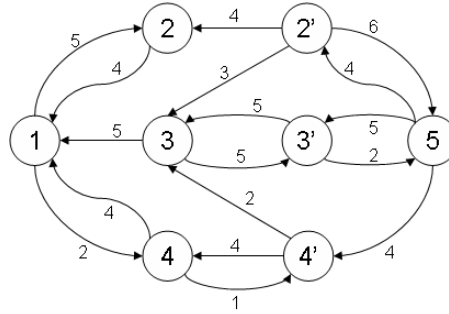
G' :



Tomando el camino $C' = 1-2-2'-5$, tenemos que $\epsilon = 4$. Los flujos que debemos actualizar son: $f_{12} = f_{22'} = f_{2'5} = 4$ y $F = 13$.

Iteración 4:

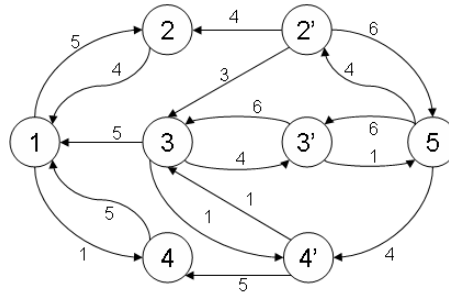
G' :



Tomando el camino $C' = 1-4-4'-3-3'-5$, tenemos que $\epsilon = 1$. Los flujos que debemos actualizar son: $f_{14} = f_{44'} = 5$, $f_{4'3} = 1$, $f_{33'} = f_{3'5} = 6$ y $F = 14$.

Iteración 5:

G' :



No existen caminos de 1 a 5 en G' . Por lo tanto, el flujo máximo $F^* = 14$. (2 Ptos.)

b) La capacidad de un corte $Q = [S, N \setminus S]$, está dada por:

$$C(Q) = \sum_{(i,j) \in Q^+} u_{ij} - \sum_{(i,j) \in Q^-} l_{ij}$$

donde:

$$\begin{aligned} Q^+ &= \{(i, j) \in A / i \in S, j \notin S\} \\ Q^- &= \{(i, j) \in A / i \notin S, j \in S\} \end{aligned}$$

Si tomamos $S = \{1, 2, 4\}$ y $N \setminus S = \{2', 3, 3', 4', 5\}$, el corte $Q = [S, N \setminus S]$ es de capacidad mínima. En efecto, como las capacidades mínimas de todos los arcos son cero:

$$C(Q) = \sum_{(i,j) \in Q^+} u_{ij} = u_{22'} + u_{13} + u_{44'} = 4 + 5 + 5 = 14$$

Por lo que se verifica que la capacidad del corte de capacidad mínima es igual al flujo máximo, $C(Q) = F^* = 14$. (0.5 Ptos.)

Notemos que el corte separa los nodos 2 y 2' en el grafo adaptado. Esto quiere decir que el nodo 2 del grafo original es una de las causas del “cuello de botella” que limita el flujo que puede pasar de 1 a 5. Lo mismo podemos concluir para el nodo 4 del grafo original.

Si tuviésemos que invertir en aumentar la capacidad de un nodo y un arco, invertiríamos en un nodo y un arco que este provocando el “cuello de botella”.

Si se invierte en aumentar la capacidad del nodo 2 (del grafo original) sería posible pasar más flujo de 1 a 5 pues los arcos (1,2) y (2',5) tienen aún capacidad disponible (5 y 6 unidades respectivamente). Si se invierte en aumentar la capacidad de arco (1,3) sería posible pasar más flujo de 1 a 5 pues los arcos (3,3') y (3',5) tienen aún capacidad disponible (4 y 1 unidades respectivamente). (0.5 Ptos.)

Otra buena alternativa de inversión es aumentar la capacidad del nodo 4 (del grafo original) y del arco (4',5), pues ambos se encuentran bloqueados. En este caso, el potencial de aumento en el flujo total está dado exclusivamente por cuanto sea aumentada la capacidad del nodo y del arco.

2. Simplex:

Necesitamos conocer el rango de variación de c_1 para que se mantenga la solución óptima de (P) . Para que no cambie la solución óptima de (P) debemos imponer que la base óptima siga siendo óptima. Para esto basta imponer que los costos reducidos sigan siendo mayores o iguales a cero (condición de optimalidad). Esto es:

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_{B^*}^T B^{*-1} R \geq 0$$

Como $B^* = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, las variables básicas son x_1 y x_2 y las no básicas son x_3 y x_4 . Entonces $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\bar{c}_R^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/7 & -3/7 \\ -3/7 & 4/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\bar{c}_R^T = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7}c_1 - \frac{3}{7} & \frac{3}{7}c_1 + \frac{4}{7} \end{pmatrix} \geq 0$$

Es decir,

$$\begin{aligned} -\frac{4}{7}c_1 - \frac{3}{7} &\geq 0 & \Leftrightarrow & c_1 \leq -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{7}c_1 + \frac{4}{7} &\geq 0 & & c_1 \geq -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Es decir, $c_1 \in [-\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}]$. (2 Ptos.)

Gráficamente:

Alternativamente (como no estaba explícito que se debía responder con argumentos de Simplex) se aceptarán respuestas basadas en análisis gráfico:

Como las variables no básicas son x_3 y x_4 se cumple que:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 24 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 24 \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} x_2 &= 6 - \frac{3}{4}x_1 \\ x_2 &= 8 - \frac{4}{3}x_1 \end{aligned}$$

Para que no cambie la solución óptima debemos hacer que la pendiente de la función objetivo deba estar contenida entre las pendientes de ambas restricciones en el plano x_1x_2 . La recta que representa las curvas de nivel de la función objetivo en el plano x_1x_2 está dada por $z = c_1x_1 - x_2$, por lo que $x_2 = -z + c_1x_1$. Luego, $c_1 \in [-\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}]$. (2 Ptos.)

Pregunta 3

1. Índices:

- c = Cento o potencial centro, $c \in \{1, \dots, C\}$, Donde C es el número total de centros.
- t = Período, $t \in \{1, \dots, T\}$, Donde T es el número total de períodos en el horizonte de planificación, medidos en meses.

2. Parámetros:

- CA_c = Costo de apertura del centro c .
- CFB_c = Costo de base de funcionamiento del centro c .
- CFO_c = El incremento en costos de funcionamiento del centro c , cuando esta ocupado con peces.
- Dda_t = Demanda planificada a satisfacer en el periodo t (metas).
- MC = Cantidad máxima de centros que se pueden abrir en un periodo.
- $CapProd_c$ = Capacidad de producción del centro c .
- $Cerrar_{ct} = \begin{cases} 1 & \text{si debo cerrar el centro } c \text{ en el periodo } t \\ 0 & \sim \end{cases}$
- TO_c = Tiempo que debe permanecer ocupado el centro c para que los peces alcancen su tamaño ideal.
- TD_c = Tiempo de descanso que se le debe asignar al centro c , antes de ser sembrado nuevamente.

3. Variables: (1 Ptos.)

- $X_{ct} = \begin{cases} 1 & \text{si abro el centro } c \text{ en el periodo } t \\ 0 & \sim \end{cases}$
- $A_{ct} = \begin{cases} 1 & \text{si el centro } c \text{ está abierto el periodo } t \\ 0 & \sim \end{cases}$
- $Y_{ct} = \begin{cases} 1 & \text{si decido cerrar el centro } c \text{ en el periodo } t \\ 0 & \sim \end{cases}$
- $O_{ct} = \begin{cases} 1 & \text{Si el centro } c, \text{ está ocupado en el período } t \\ 0 & \sim \end{cases}$
- $COS_{ct} = \begin{cases} 1 & \text{Si cosecho el centro } c, \text{ en el período } t \\ 0 & \sim \end{cases}$

4. **Función Objetivo:** (1 Ptos.)

$$\min \sum_{c,t} CA_c \cdot X_{ct} + \sum_{c,t} (A_{ct} \cdot CFB_c + O_{ct} \cdot CFO_c) \quad (1)$$

5. **Restricciones:**

a) Naturaleza de las variables. (0.2 Ptos.)

$$X_{ct}, Y_{ct}, O_{ct}, COS_{ct} \in \{0, 1\} \quad (2)$$

b) Sólo puedo abrir una vez cada centro. (0.3 Ptos.)

$$\sum_t X_{ct} \leq 1 \quad \forall c \quad (3)$$

c) Cantidad máxima de centros a abrir por periodo (Debido a que no es posible abrir muchos centros en un sólo período). (0.3 Ptos.)

$$\sum_c X_{ct} \leq MC \quad \forall t \quad (4)$$

d) No se pueden cerrar centros que no hayan sido abiertos. (0.4 Ptos.)

$$Y_{ct} \leq \sum_{\theta=1}^{t-1} X_{c\theta} \quad \forall c, t > 1 \quad (5)$$

e) Restricción Medio Ambiental: Debo cerrar centros cuando el gobierno lo exige, si es que estaba abierto. (0.3 Ptos.)

$$Y_{ct} \geq Cerrar_{ct} \cdot A_{c,t-1} \quad \forall c, t > 1 \quad (6)$$

f) Lo que se produce en el periodo t, debe ser suficiente para satisfacer la demanda planificada. (0.3 Ptos.)

$$\sum_c (COS_{ct} \cdot CapProd_c) \geq Dda_t \quad \forall t \quad (7)$$

g) Un centro puede estar ocupado sólo si está abierto. (0.3 Ptos.)

$$O_{ct} \leq A_{ct} \quad \forall c, t \quad (8)$$

- h) Para poder cosechar un centro, debe haber estado ocupado el tiempo que corresponde a ese centro para que los salmones alcancen su tamaño ideal. (0.8 Ptos.)

$$\sum_{\theta=t-TO_c+1}^t O_{c\theta} \geq COS_{ct} \cdot TO_c \quad \forall c, t \geq TO_c \quad (9)$$

$$\sum_{\theta=1}^t O_{c\theta} \geq COS_{ct} \cdot TO_c \quad \forall c, t < TO_c \quad (10)$$

$$\text{ó } COS_{ct} = 0 \quad \forall c, t < TO_c$$

- i) No puedo cosechar más de MaxCos centros en un mismo periodo. (0.3 Ptos.)

$$\sum_c COS_{c,t} \leq MaxCos \quad \forall t \quad (11)$$

- j) Para poder cosechar en cierto periodo, debe haber pasado al menos el tiempo requerido para el crecimiento de los salmones en ese centro más el periodo de descanso del centro respectivo. (0.8 Ptos.)

Alternativa 1:

$$O_{ct} + \sum_{\theta=t-TD_c+1}^t COS_{c\theta} \leq 1 \quad \forall c, t \geq TD_c \quad (12)$$

Alternativa 2:

$$1 - COS_{ct} \geq COS_{c\theta} \quad \forall c, t \leq T - TO_c - TD_c, \theta \in [t+1, t+TO_c+TD_c] \quad (13)$$

$$1 - COS_{ct} \geq COS_{c\theta} \quad \forall c, t > T - TO_c - TD_c, \theta \in [t+1, T] \quad (14)$$

- k) Definición de la variable auxiliar A_{ct} : Un centro esta abierto, si es que lo he abierto y aún no ha sido cerrado. (0 Ptos.)

$$A_{ct} = \sum_{\theta=1}^t (X_{c\theta} - Y_{c\theta}) \quad \forall c, t \quad (15)$$

Nota: Es posible haber modelado el problema sin la variable A_{ct} (si el centro c está abierto en t o no), pues es una variable auxiliar: $A_{ct} = \sum_{\theta=1}^t (X_{c\theta} - Y_{c\theta}) \quad \forall c, t$. Por esta razón, por definir la variable A_{ct} no se asigna puntaje.