



Universidad de Chile  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Industrial  
IN34A – Optimización

Profesores: Francisco Cisternas  
Richard Weber  
Auxiliares: André Carboni  
Leonardo López  
Gonzalo Romero  
Rodrigo Wolf

## Examen 03 de Diciembre de 2007

### Problema 1

- (1.5 pts.) Considere un modelo de optimización para planificar la construcción de sillas y mesas, en el cual se tienen 3 recursos escasos: madera, fierro y horas/hombre por semana. Sean  $Y_m$ ,  $Y_f$ ,  $Y_{hh}$  las variables duales asociadas a estas tres restricciones respectivamente, obtenidas al resolver una instancia particular.  
Evalúe las siguientes propuestas de negocios:
  - Si en el óptimo la variable de holgura de la restricción asociada a la madera vale cero, que valores puede tomar la variable de dual asociada a esa restricción. ¿Estaría dispuesto a comprar 1 unidad de madera a un precio  $(Y_m + 1)$ ? Justifique.
  - No se conoce el valor de la variable dual  $Y_f$ . Pero se sabe que la restricción del problema primal asociada al fierro es no activa. Sin hacer nuevos cálculos, ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por una unidad de fierro adicional? Justifique.
  - Un trabajador quiere trabajar para Ud. y le ofrece trabajar 45 horas a la semana a un precio de  $Y_{hh} - 1$ , cada hora. ¿Aceptaría el negocio? Justifique.
- (1.5 pts.) Explique el Algoritmo Dijkstra, para esto utilice un pseudo código de su funcionamiento e iteraciones. Además explique por qué no es posible utilizar este algoritmo cuando se tienen costos negativos, dé un ejemplo de cuando el algoritmo falla en estas condiciones.
- (1.5 pts.) Para que un problema pueda ser resuelto con programación dinámica, debe cumplir con ciertas condiciones, nómbrelas y justifique su importancia para poder utilizar esta técnica.
- (1.5 pts.) Explique el concepto de dualidad. ¿Puede ser utilizado este concepto para resolver los problemas lineales que se van generando en las ramificaciones en el algoritmo Branch and Bound?

### Problema 2

Nuestro conocido héroe Lelopez, debido a sus ansias por ayudar a la comunidad, ha decidido dedicarse a la medicina rural. Para esto ha tomado un curso rápido de medicina general, y pretende hacer su ronda en las ciudades de la hermosa decima región partiendo desde su pintoresca capital Puerto Montt.

Considere que Lelopez puede visitar  $N$  ciudades y dispone de un total de  $M$  días para hacerlo con  $M \geq N$  (puede no ocupar todos los días disponibles).

Por su experiencia sabe que la ayuda que puede brindar en cada una de las ciudades se define según una función  $g_n$ , que define las unidades de ayuda [u.a.] recibidas por la ciudad  $n$ , la que depende del número de días que pase en la ciudad.

Se sabe además que no pasar a una ciudad (i.e pasar 0 días) que tiene menos de  $D$  médicos tiene un costo asociado de  $c_n$  [u.a] tal que:

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{Si } n^\circ \text{ de médicos} \geq D \\ 2 & \text{Si } n^\circ \text{ de médicos} < D \end{cases}$$

a) Plantee un modelo de programación dinámica para resolver la planificación de las visitas médicas de Lelopez, maximizando la ayuda total brindada en la hermosa decima región.

b) Suponga que  $D = 4$ ,  $n = 3$  y  $M = 5$ , y que las funciones de beneficio  $g_n(x_n)$  vienen dadas por:

	$g_1(x_1)$	$g_2(x_2)$	$g_3(x_3)$
$x_n=0$	0	0	0
$x_n=1$	1	1	1
$x_n=2$	4	2	3
$x_n=3$	5	3	3
$x_n=4$	8	5	2
$x_n=5$	8	6	1

Además usted sabe que las ciudades 1 y 2 tienen 6 médicos cada una, en cambio la ciudad 3 tiene solo 2 médicos.

A partir de los datos anteriores encuentre la(s) planificación(es) óptima(s) para Lelopez.

### Problema 3

El incansable Lelopez está pasando por un mal momento económico, pero no quiere que por ningún motivo su familia pase una Navidad sin regalos, por lo que ha decidido aceptar un empleo como Viejo Pascuero durante la Nochebuena.

El trabajo consiste en visitar las  $N$  familias que le fueron asignadas por la empresa que lo contrató, entregándole a cada familia  $i$  los  $q_i$  regalos que les corresponden. Suponga que los tiempos de viaje entre dos familias son conocidos, definidos por  $t_{ij}$  para las familias  $i$  y  $j$ , y que en cada casa Lelopez se demora un tiempo conocido  $T_i > 0$  en entregar los regalos.

Por reglas de la empresa debe visitar a cada familia exactamente una vez, y los viajes los debe realizar en una camioneta corporativa, decorada con motivos navideños, de capacidad  $CAP$  [regalos].

Suponga que la cantidad total de regalos supera la capacidad de la camioneta, y que la empresa le pide realizar exactamente  $K$  vueltas, donde en cada vuelta debe realizar un proceso administrativo que le toma un tiempo  $TC$ .

Además, cada familia  $i$  ha definido una ventana de tiempo en la que estará disponible para recibir los regalos, definida por  $[a_i, b_i]$ .

Considere que Lelopez debe comenzar y terminar su recorrido en la casa matriz de la empresa, la que para efectos de notación denotaremos como un nodo más de la red con índice  $i=0$ .

Ayude a Lelopez a desarrollar un modelo de programación lineal mixto que le permita planificar la secuencia de visitas, y los instantes de tiempo en que debe llegar a cada visita, de modo de terminar lo antes posible y poder llegar a su casa a disfrutar la Navidad con su familia.

**Hint:** Puede ser útil duplicar el nodo que representa la casa matriz, considerándolo como  $i=0$  para una casa matriz "de partida", e  $i=N+1$  representando una casa matriz "de llegada".

# Pauta Examen

## Problema 1

### 1. Respuestas

- Si la variable de Holgura asociada la restricción de madera vale cero, quiere decir que la restricción es activa, por lo que estaría dispuesto a comprar una unidad adicional de madera a un precio máximo de  $Y_m$ . Como en este caso el precio es superior a  $Y_m$ , no me conviene, puesto que mi ganancia es menor que el precio que debo pagar. (clave: variable dual es positiva, no debo aceptar el trato y justificación).
- Como la restricción asociada al fierro es pasiva, quiere decir que "me sobra fierro" por lo tanto no me sirven nuevas unidades de fierro para aumentar mi beneficio, por lo que sin hacer nuevos cálculos debería rechazar la propuesta a menos que el precio fuera cero.
- Si bien conviene comprar la primera unidad de HH al precio ofertado, nadie garantiza que para el resto de las horas sea conveniente el precio ofertado, por lo que no tengo información suficiente para tomar la decisión respecto del negocio.

2. El algoritmo de Dijkstra se inicia con un conjunto  $S$  vacío, y valores de rutas más cortas parciales definidas como infinito para todos los nodos de la red, excepto el origen que tiene una ruta más corta conocida, trivialmente igual a cero. Luego, su funcionamiento consiste en ir agregando a  $S$  en cada iteración el nodo no perteneciente a este conjunto de menor distancia parcial, actualizando el valor la ruta más corta parcial del resto de los nodos que no están en  $S$ , si es que existe un arco que los una al nodo recién agregado.

Un pseudo código sería:

Sea el grafo orientado  $G = [N, A]$  y la función de costos  $l : A \rightarrow R^+$

1. Se define el conjunto  $S = \emptyset$ , junto con  $\pi(1) = 0$ ,  $\pi(i) = +\infty \forall i \neq 1$  y  $P(1) = 1$ .

2. Repetir hasta que  $S = N$ :

Encontrar  $j$  no perteneciente a  $S$  tal que

$$\pi(j) = \min_{k \in T} \{\pi(k)\}$$

.

Luego  $S = S \cup \{j\}$ .

Para cada  $i$  tal que existe un arco de  $j$  a  $i$ , con  $i$  no perteneciente a  $S$ , hacer:

Si  $\pi(i) > \pi(j) + l(j, i)$  entonces  $\pi(i) = \pi(j) + l(j, i)$  y  $P(i) = j$

Este algoritmo no se puede utilizar con costos negativos,

Porque el algoritmo podría no encontrar la ruta más corta. Por ejemplo, en una red de 3 nodos, donde hay un camino de 1 al 3 de longitud 2, de 1 al 2 de longitud 3 y otro de 2 al 3 de longitud -2, Dijkstra no encuentra la ruta mas corta de 1 a 3. Encuentra el camino de longitud 2 y no el de longitud 1.

3. Para que un problema pueda ser resuelto con la técnica de programación dinámica, debe cumplir con ciertas características:
- Naturaleza secuencial de las decisiones: El problema puede ser dividido en etapas.
  - Cada etapa tiene un número de estados asociados a ella.
  - La decisión óptima de cada etapa depende solo del estado actual y no de las decisiones anteriores.
  - La decisión tomada en una etapa determina cual será el estado de la etapa siguiente.

En síntesis, la política óptima desde un estado  $s$  de la etapa  $k$  a la etapa final esta constituida por una decisión que transforma  $s$  en un estado  $s'$  de la etapa  $k + 1$  y por la política óptima desde el estado  $s'$  hasta la etapa final.

4. Al ir agregando las restricciones que generan los nuevos nodos del árbol de B&B, la solución del nodo padre resulta ser infactible en los nodos hijos, por lo que no es posible partir de ella para seguir iterando utilizando simplex. Sin embargo, al reconocer que la nueva restricción solo agrega una nueva variable en el problema dual, es evidente que la solución dual del nodo padre es factible en los problemas duales de los nodos hijos por lo que resulta natural utilizar el concepto de dualidad para resolver los problemas lineales que se van generando en las ramificaciones en el algoritmo B&B.

Nota de corrección: Una respuesta de un examen anterior a la misma pregunta, y por lo tanto también válida, es:

RESPUESTA: Al definir problemas continuos se van agregando cotas (restricciones). Al mirar el problema dual, se puede observar que este aumenta en el número de variables. Es claro que resolver problemas con aumento de variables es menos trabajoso (en cuanto a la utilización de recursos) que resolver problemas con aumento de restricciones. Luego es de utilidad resolver el problema dual.

## Problema 2

a) Modelo en Programación Dinámica:

Etapas:

1,...,N ciudades.

Variables de estado:

$S_n$  = número de días disponibles para visitar a la ciudad n

$d_n$  = número de médicos en la ciudad n

Variables decisión:

$X_n$  número de días que pasa en la ciudad n.

Función Beneficio:

$$V_n(S_n, X_n) = g_n(X_n) - c_n(d_n) + V_{n+1}^*(S_{n+1}) \quad \text{Si } X_n=0$$

$$V_n(S_n, X_n) = g_n(X_n) + V_{n+1}^*(S_{n+1}) \quad \text{Si } X_n>0$$

Donde

$$V_n^*(S_n) = \max_{0 \leq X_n \leq S_n} (S_n, X_n)$$

Función Recurrencia:

$$S_{n+1} = S_n - X_n$$

Condiciones de Borde

$$V_{n+1} = 0$$

$$S_1 = M$$

b) Iterando desde n=3

$S_3 \backslash X_3$	0	1	2	3	4	5	$V_3^*(S_3)$	$X_3^*$
0	-2	-	-	-	-	-	-2	0
1	-2	1	-	-	-	-	1	1
2	-2	1	3	-	-	-	3	2
3	-2	1	3	3	-	-	3	2 o 3
4	-2	1	3	3	2	-	3	2 o 3
5	-2	1	3	3	2	1	3	2 o 3

Para n=2

$S_2 \backslash X_2$	0	1	2	3	4	5	$V_2^*(S_2)$	$X_2^*$
0	-2	-	-	-	-	-	-2	0
1	1	-1	-	-	-	-	1	0
2	3	2	2	-	-	-	3	0
3	3	4	3	1	-	-	4	1
4	3	4	5	4	3	-	5	2
5	3	4	5	6	6	4	6	3 o 4

Para n=1

$S_1 \backslash X_1$	0	1	2	3	4	5	$V_1^*(S_1)$	$X_1^*$
5	6	6	8	8	9	6	9	4

Luego, la ayuda máxima que puede brindar Lelopez a la decima región son 9 [u.a],  
y la política optima que debe seguir para alcanzarlo es:

$V_1^* = 9$
$X_1^* = 4$
$X_2^* = 0$
$X_3^* = 1$

### Problema 3

Variables:

$$x_{ijk} \begin{cases} 1 & \text{Si viaja de } i \text{ a } j \text{ en la vuelta } k. \\ 0 & \text{Si no.} \end{cases}$$

$w_{ik}$  = instante de tiempo en que visita a la familia i en la vuelta k

Restricciones:

1) Naturaleza de las variables

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall i, j, k \quad w_{ik} \geq 0$$

2) Visitar a todos los clientes en alguna vuelta

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^N x_{ijk} = 1 \quad \forall j \in N \setminus \{0, N+1\}$$

3) De la casa matriz se sale una vez por vuelta

$$\sum_{j=1}^{N+1} x_{0jk} = 1 \quad \forall k$$

4) A la casa matriz se vuelve una vez por vuelta

$$\sum_{i=0}^N x_{i(N+1)k} = 1 \quad \forall k$$

5) Continuidad de flujo para los clientes en cada vuelta

$$\sum_{i=0}^N x_{ijk} = \sum_{i=1}^{N+1} x_{jik} \quad \forall j \in N \setminus \{0, N+1\}, \forall k$$

6) Respetar la capacidad de la camioneta en cada vuelta

$$\sum_{i=0}^N q_i \sum_{j=1}^{N+1} x_{ijk} \leq CAP \quad \forall k$$

OBS: supongo que le asigno una demanda nula a la casa matriz, i.e.  $q_0=0$

7) Secuencia de los tiempos de visita en una vuelta

$$w_{ik} + T_i + t_{ij} - (1 - x_{ijk}) \cdot M \leq w_{jk} \quad \forall (i, j), k \quad M \gg 1$$

OBS: supongo que a la casa matriz le asigno un tiempo de atención necesario para hacer el proceso administrativo, i.e.  $T_0=TC$

8) Secuencia de tiempos entre vueltas

$$w_{(N+1)k} = w_{0(k+1)}$$

9) Respetar las ventanas de tiempo

$$a_j \cdot \sum_{i=0}^N x_{ijk} \leq w_{jk} \leq b_j \cdot \sum_{i=0}^N x_{ijk} \quad \forall j \in N \setminus \{0, N+1\}, \forall k$$

Función Objetivo

$$\min z = w_{N+1,K}$$

OBS: el objetivo es minimizar el tiempo en que retorna a la casa matriz en la última vuelta, ya que después de eso Lelopez se va a su casa. Notar que minimizar la suma de tiempo no es adecuado, ya que no considera los tiempos muertos que puede haber entre ventanas de tiempo.

**Dudas y/o comentarios a:**  
**Gonzalo Romero**  
**gromero@ing.uchile.cl**