



Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A - Optimización

Profs: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Aux: Leonardo López
Gonzalo Romero
Rodrigo Wolf

Examen

06 de Julio de 2007

Pregunta 1

1. (1 pto.) ¿Conoce algún problema en P que esté también en NP? ¿Conoce algún problema en P que esté también en NP-Completo? Explique el significado en términos de teoría de la complejidad de sus 2 respuestas.
2. (1 pto.) Muestre como se deduce cuál es el siguiente punto x^{k+1} de las iteraciones del Método de Newton para optimizar funciones no lineales. Explique conceptual y geoméricamente el funcionamiento del mismo.
3. (1 pto.) Muestre un ejemplo de un problema lineal infactible cuyo dual también sea infactible.
4. (1 pto.) Sea un problema de la mochila entero con n objetos y peso máximo igual a W . Se sabe que por medio de programación dinámica este problema puede resolverse en forma óptima en tiempo $O(nW)$. ¿Implica esto que es un problema polinomial? Justifique
5. (1 pto.) Suponga que tiene una red de sólo 3 nodos con un arco del nodo 1 al nodo 2, con capacidades máxima y mínima igual a (5,8), y otro arco del nodo 2 al nodo 3, con capacidades máxima y mínima igual a (2,3). Aplique el algoritmo de flujo inicial (fase I de Ford y Fulkerson) para demostrar que no existe un flujo factible del nodo 1 al nodo 3. Explique el resultado teórico que está usando para justificar que dicho flujo no existe.
6. (1 pto.) Dado un problema de programación dinámica, explique el significado de las variables de decisión, de las variables exógenas (parámetros) y de las variables de estado.

Pregunta 2

Considere que se cuenta con un camión a llenar de capacidad K , y que debemos escoger entre N diferentes items a colocar, cada uno tiene un beneficio unitario de c_i y un peso w_i , y una disponibilidad máxima de d_i (es decir, disponemos a lo más de d_i unidades del item i para colocar en nuestro camión). Asuma que los items no pueden fragmentarse (es decir solo se admiten items completos en el camión), y que la capacidad no usada en el camión no reporta beneficios.

1. (3 ptos.) Formule el problema anterior como un problema de programación dinámica.
2. (3 ptos.) Usando la formulación anterior, resuelva la siguiente instancia: $K = 100$, $N = 4$, y los datos en la tabla 1.

Item	c_i	w_i	d_i
1	47	55	1
2	23	27	2
3	11	13	2
4	6	7	3

Cuadro 1: Beneficio, peso y disponibilidad para cada item

Pregunta 3

Las eliminatorias sudamericanas para Sudáfrica 2010, que comienzan dentro de algunos meses, son jugadas por 10 equipos. Los 4 primeros clasifican para el Mundial y el sistema es de todos contra todos con partido y revancha. La asignación de puntaje es de 3 puntos por partido ganado y 1 punto por empate. Ante igualdad en las posiciones se define la ubicación por diferencia de goles.

1. (4 ptos.) Diseñe un modelo de programación lineal entera que (asignando todos los resultados posibles) antes de realizada la primer fecha indique cuál es la máxima cantidad de puntos con que Chile puede no clasificar para Sudáfrica 2010.
2. (1 pto.) Si una vez finalizada la primer fecha, Chile (equipo 1) le ganó su partido a la poderosa selección trasandina (equipo 2), ¿cómo se incluye este resultado en el modelo? ¿Y si fue un empate? ¿Y si fue derrota?
3. (1 pto.) Una vez resuelto el modelo para una fecha determinada de la eliminatoria, ¿qué le contestaría al técnico Acosta si éste le pregunta con cuántos puntos tiene Chile garantizada su clasificación?

Sugerencias: utilice al menos una familia de variables enteras que definan la cantidad de partidos que el equipo i le gana al equipo j , y una variable entera para cada equipo rival de Chile que valga 1 si el conjunto tiene igual o más puntos que Chile, y 0 en caso contrario.



Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A - Optimización

Profs: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Aux: Leonardo López
Gonzalo Romero
Rodrigo Wolf

Pauta Examen

06 de Julio de 2007

Pregunta 1

1. (1 pto.)

¿Conoce algún problema en P que esté también en NP?

Como $P \subseteq NP$, todo problema en P está en NP.

¿Conoce algún problema en P que esté también en NP-Completo?

No. Si encontráramos un problema en P que está también en NP-completo entonces todos los problemas pertenecientes a este conjunto podrían ser resueltos con complejidad polinomial. Es un problema abierto saber si existe algún algoritmo polinomial para cualquier problema de NP-completo.

2. (1 pto.) El método de Newton se basa en aproximar la función f por una función cuadrática (en cada punto x^k se aproxima por la expansión de Taylor de orden 2) y esta aproximación se minimiza exactamente, generando un nuevo punto x^{k+1} .

$$q(x) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T (x - x^k) + \frac{1}{2} (x - x^k)^T H f(x^k) (x - x^k)$$

$$\nabla q(x) = \nabla f(x^k) + H f(x^k) (x - x^k) = 0$$

Luego, despejando x obtenemos la solución de este problema, la que determina el punto x^{k+1} .
Entonces:

$$x^{k+1} = x^k - [H f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k)$$

3. (1 pto.) Por ejemplo, el siguiente problema primal es infactible:

$$\text{máx } z = x_1 + x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 0$$

$$x_1 - x_2 \leq -1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

y su dual también es infactible:

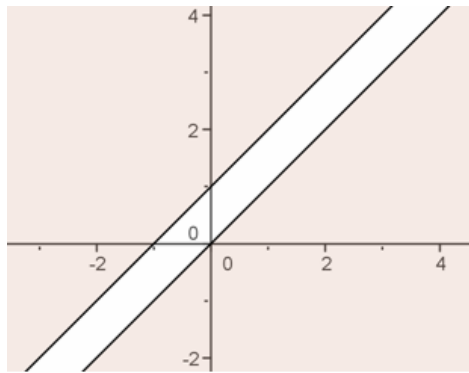
$$\text{mín } w = -y_2$$

$$-y_1 + y_2 \geq 0$$

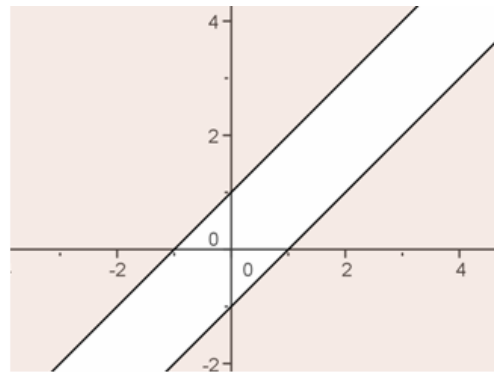
$$y_1 - y_2 \geq -1$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Gráficamente se puede observar lo anterior:

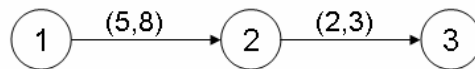


Primal

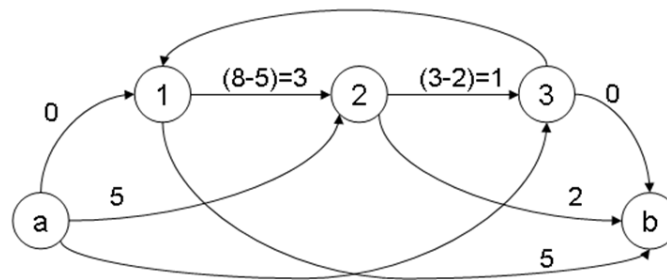


Dual

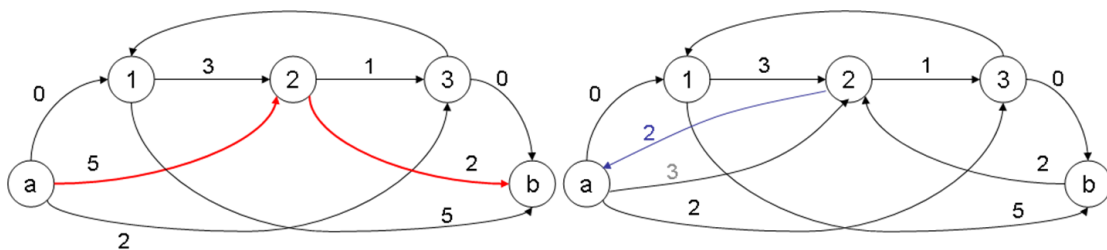
4. (1 pto.) No. Pues el peso máximo de la mochila W puede ser exponencial en función del número de objetos, por ejemplo $W = 2^n$. En este caso el tiempo $O(nW)$ no sería de orden polinomial.
5. (1 pto.)



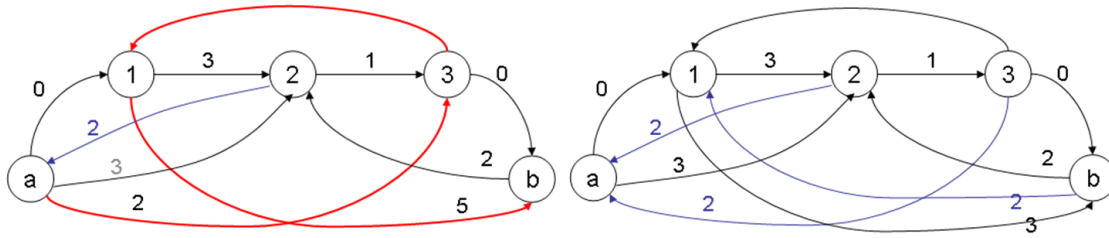
Debemos determinar el flujo máximo F^* en G^* a través de Ford y Fulkerson. El grafo auxiliar G^* es el siguiente, el cual muestra la cantidad máxima de flujo a través de cada arco (el flujo mínimo es cero)



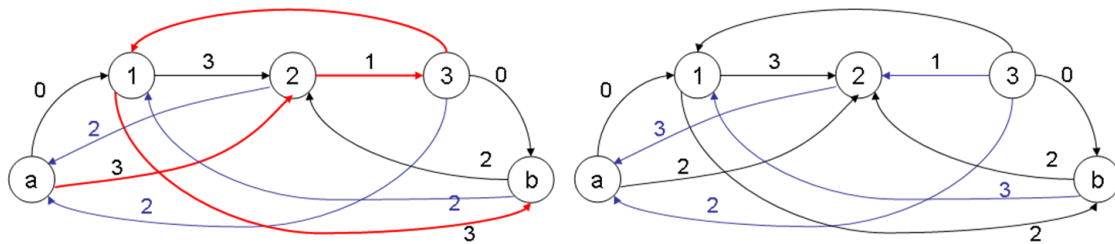
Iteración 1: $C = a - 2 - b$. $\varepsilon = 2$.



Iteración 2: $C = a - 3 - 1 - b$. $\varepsilon = 2$.



Iteración 3: $C = a - 2 - 3 - 1 - b$. $\epsilon = 1$.



Podemos notar que ya no existe otro camino, por lo que llegamos al óptimo, $F^* = 29$. Sabemos que si $F^* < \sum_{(i,j) \in A} l_{ij}$ entonces la red original G no admite flujo factible. Como $\sum_{(i,j) \in A} l_{ij} = l_{12} + l_{23} = 7 > F^* = 29$ entonces no existe flujo factible desde el nodo 1 al 3.

6. (1 pto.) Las variables de decisión son decisiones cuantificables cuyos valores se intenta determinar por medio de la resolución del modelo. Su valor determina el valor de las variables de estado de las etapas futuras. Las variables de estado son variables que caracterizan la situación en la que se encuentra el sistema en una etapa dada. Estas variables dan la independencia a la etapa actual de las etapas anteriores, por lo que deben existir tantas variables de estado como las que permitan establecer en que condiciones comienza (o finaliza) una etapa para su posterior optimización. Las variables exógenas o parámetros representan los valores conocidos del sistema y se diferencian de las variables de decisión en que no son controlables.

Pregunta 2

1. (3 pto.)

- Etapas:** Cada uno de los items, $i = 1, 2, \dots, N$.
- Variables de decisión:**
 X_i : Cantidad de unidades del item i que se carga al camión.
- Variables de estado:**
 S_i : Capacidad disponible en el camión al inicio de la etapa i .
- Recurrencia de estados:**

$$S_{i+1} = S_i - w_i X_i$$

- Función de beneficios:**

$$V_i(S_i, X_i) = c_i X_i + V_{i+1}^*(S_{i+1})$$

$$V_i^*(S_i) = \max_{0 \leq X_i \leq \min\{d_i, \frac{S_i}{w_i}\}} \{V_i(S_i, X_i)\}$$

ó

$$V_i^*(S_i) = \max_{\substack{0 \leq X_i \leq d_i \\ 0 \leq X_i \leq \frac{S_i}{w_i}}} \{V_i(S_i, X_i)\}$$

f) Condiciones de borde:

$$S_1 = K$$

$$V_{N+1} = 0$$

2. (3 ptos.)

Etapa 4						
S4\X4	0	1	2	3	X*4	V*4
100	0	6	12	18	3	18
87	0	6	12	18	3	18
74	0	6	12	18	3	18
63	0	6	12	18	3	18
60	0	6	12	18	3	18
47	0	6	12	18	3	18
46	0	6	12	18	3	18
45	0	6	12	18	3	18
33	0	6	12	18	3	18
32	0	6	12	18	3	18
20	0	6	12	-	2	12
19	0	6	12	-	2	12
18	0	6	12	-	2	12
5	0	-	-	-	0	0

Etapa 3					
S3\X3	0	1	2	X*3	V*3
100	18	29	40	2	40
63	18	29	40	2	40
46	18	29	34	2	34
45	18	29	34	2	34
18	12	11	-	0	12

Etapa 2					
S2\X2	0	1	2	X*2	V*2
100	40	63	80	2	80
45	34	35	-	1	35

Etapa 1				
S1\X1	0	1	X*1	V*1
100	80	82	1	82

Politica Optima	
X*1	1
X*2	1
X*3	0
X*4	2
V*1	82
Cap Usada	96

Pregunta 3

1. (4 ptos.)

Variables de decisión

x_{ij} : cantidad de partidos que el equipo i le gana al equipo j .

y_i : 1 si el equipo i tiene los mismos o más puntos que la roja.

P_i : cantidad de puntos que tiene el equipo i .

Restricciones

Llamemos a Chile $i = 1$ y a Argentina $i = 2$.

a) Naturaleza de las variables.

$$x_{ij} \in \{0, 1, 2\} \quad \forall i, j.$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i.$$

$$P_i \geq 0 \quad \forall i.$$

b) Combinación de resultados posibles.

$$x_{ij} + x_{ji} \leq 2 \quad \forall i, j \text{ tal que } i \neq j.$$

c) Calculo de los puntos de cada equipo.

$$P_i = 3 \sum_{j \neq i} x_{ij} + \sum_{j \neq i} (2 - x_{ij} - x_{ji}) \quad \forall i.$$

d) Condicion para quedar eliminado.

$$\sum_{i \neq 1} y_i \geq 4$$

e) Obligar a la variable y_i a tomar valor cero cuando corresponda.

$$P_i \geq P_1 - M(1 - y_i) \quad \forall i$$

f) Obligar a la variable y_i a tomar valor uno cuando corresponda.

$$P_i + 1 \leq P_1 + M y_i \quad \forall i$$

Función Objetivo

$$\text{máx} \quad Z = P_1$$

2. (1 pto.) Para ello es necesario agregar como restricciones el resultado.

a) **Triunfo:** $x_{12} \geq 1$.

b) **Derrota:** $x_{21} \geq 1$.

c) **Empate:** $x_{12} + x_{21} \leq 1$.

3. (1 pto.) Como se ha visto, el modelo entrega la mayor cantidad de puntos que puede obtener un equipo y aún así tener posibilidades de no clasificar para el mundial. Dado esto, al resultado obtenido (Z^*) se le debe agregar un punto más, con lo cual se obtiene la cantidad de puntos que asegura la clasificación.

Dudas y/o consultas
Leonardo López H.
lelopez@ing.uchile.cl