



**Examen IN34A  
8 de julio de 2005**

**Problema 1**

1) Explique qué significa que un problema de decisión esté en P, en NP y en NP-completo. ¿Cómo son las relaciones de inclusión entre estas 3 clases?

2) Sea el problema (P) de optimización con restricciones

$$\begin{aligned} \text{(P) Min } f(x) \\ \text{s.a } g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

Escriba las condiciones suficientes para que un punto  $x$  sea mínimo global de (P).

3) Dado un problema de programación lineal, ¿cuál es la relación entre soluciones factibles básicas y vértices del poliedro factible del problema?

4) Mostrar un ejemplo donde los problemas primal y dual de programación lineal sean ambos no acotados.

5) Explique porqué el algoritmo para Programación Entera visto en clase se llama de "Ramificación y Acotamiento"

6) Dé un ejemplo de porqué el algoritmo de Dijkstra para rutas más cortas podría no funcionar si existen arcos con longitudes negativas, explicando el motivo de la falla.

**Problema 2**

Una cadena de supermercados pequeña posee 3 salas de venta y sufre el problema de muchos quiebres de venta (un producto determinado no se encuentra en la góndola).

La cadena quiere resolver este problema a través de un mayor número de reponedores en las salas y puede contratar hasta 4 personas.

En un proyecto de la Universidad de Chile se determinó el beneficio adicional que genera un reponedor adicional en una sala de ventas. La siguiente tabla muestra el resultado de este proyecto (en UM: unidades monetarias por año).

	1 reponedor	2 reponedores	3 reponedores	4 reponedores
Sala 1	9	15	20	25
Sala 2	12	17	18	19
Sala 3	17	21	22	22

Por ejemplo asignar 2 reponedores a la sala 1 genera 15 UM adicionales por año.

La cadena de supermercado quiere asignar los reponedores a las salas en una forma que maximice el beneficio adicional generado por los 4 personas nuevas.

- Resuelve el problema aplicando programación dinámica.
- Identifique estados, etapas, variables de decisión, la función de transformación y la función de recursión.
- ¿Cuál(es) es (son) la(s) política(s) óptima(s)?

### Problema 3

Considere a los inversionistas de la empresa BM&C que están decidiendo en qué proyectos invertir.

Se dispone de  $M$  millones de pesos para invertir en  $N$  proyectos diferentes. Cada proyecto  $i$  requiere una inversión de  $I_i$ , y su rentabilidad es de  $r_i$ . Además cada proyecto  $i$  entrega, en un horizonte de diez años, un beneficio no monetario a la sociedad de  $b_i$ .

Se tiene además que los proyectos se clasifican en  $Q$  grupos, según la industria a la que pertenecen. De forma tal que se define el grupo  $j$  por el conjunto  $A_j$  que contiene los subíndices de los proyectos que pertenecen al grupo  $j$ .

Considere que:

- Se debe invertir en al menos un proyecto de cada grupo  $j$ .
- No se puede invertir en fracciones de proyectos
- No se puede invertir en más de dos proyectos por grupo y no se puede gastar menos de  $H$  millones de pesos en cada área. ( $H < M$ )
- Dentro de cada grupo hay proyectos que son incompatibles por lo que no se puede invertir en ellos simultáneamente, así el conjunto de proyectos incompatibles con el proyecto  $i$  está dado por el conjunto  $D_i$ .
- Existen también proyectos que necesitan de la realización de otros para poder llevarse a cabo, es decir tienen como requisitos otros proyectos. El conjunto de proyectos que son requisitos del proyecto  $i$  está dado por  $K_i$ . ( $K_i$  y  $D_i$  tienen intersección vacía)
- Usted no puede exceder el presupuesto, pero debe proveer a su empresa de una rentabilidad mínima de  $R$ .

Dado que este es el último negocio que la empresa hace como sociedad han resuelto que el criterio para decidir su cartera de inversiones será maximizar el bienestar no monetario de la sociedad en los próximos diez años.

Formule un problema de programación entera que resuelva el problema de BM&C.

## Pauta PPL

### Variables

- $X_{ijk}$ : 1 si el técnico  $k$  visita la máquina  $j$  después de visitar la máquina  $i$   
0 si no  
 $m_{ik}$  momento en que la máquina  $i$  empieza a ser atendida por el técnico  $k$   
 $v_{ik}$  violación de TRM realizada por el técnico  $k$  al atender a la máquina  $i$

### Restricciones:

#### Concordancia entre los tiempos

$$m_{ik} + s_j + t_{ik} \leq m_{jk} + (1 - X_{ijk})M$$
$$\forall i, j = 1, \dots, N, \forall k = 1, \dots, K$$

#### Todas las máquinas deben ser atendidas por un solo técnico

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^N X_{ijk} = 1$$
$$\forall i = 1, \dots, N$$

#### De todas las máquinas, entra y sale el mismo técnico.

$$\sum_{i=1}^N X_{ijk} - \sum_{i=1}^N X_{jik} = 0$$
$$\forall j = 1, \dots, N, \forall k = 1, \dots, K$$

#### Se define la violación.

$$m_{ik} - (g_i + TRM) = v_{ik}$$
$$\forall i, j = 1, \dots, N, \forall k = 1, \dots, K$$

#### Naturaleza de las variables

$$X_{ijk} \in \{0, 1\}$$
$$m_{ik}, v_{ik} \geq 0$$
$$\forall i, j = 1, \dots, N, \forall k = 1, \dots, K$$

#### Función objetivo:

$$\min z = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N v_{ik}$$